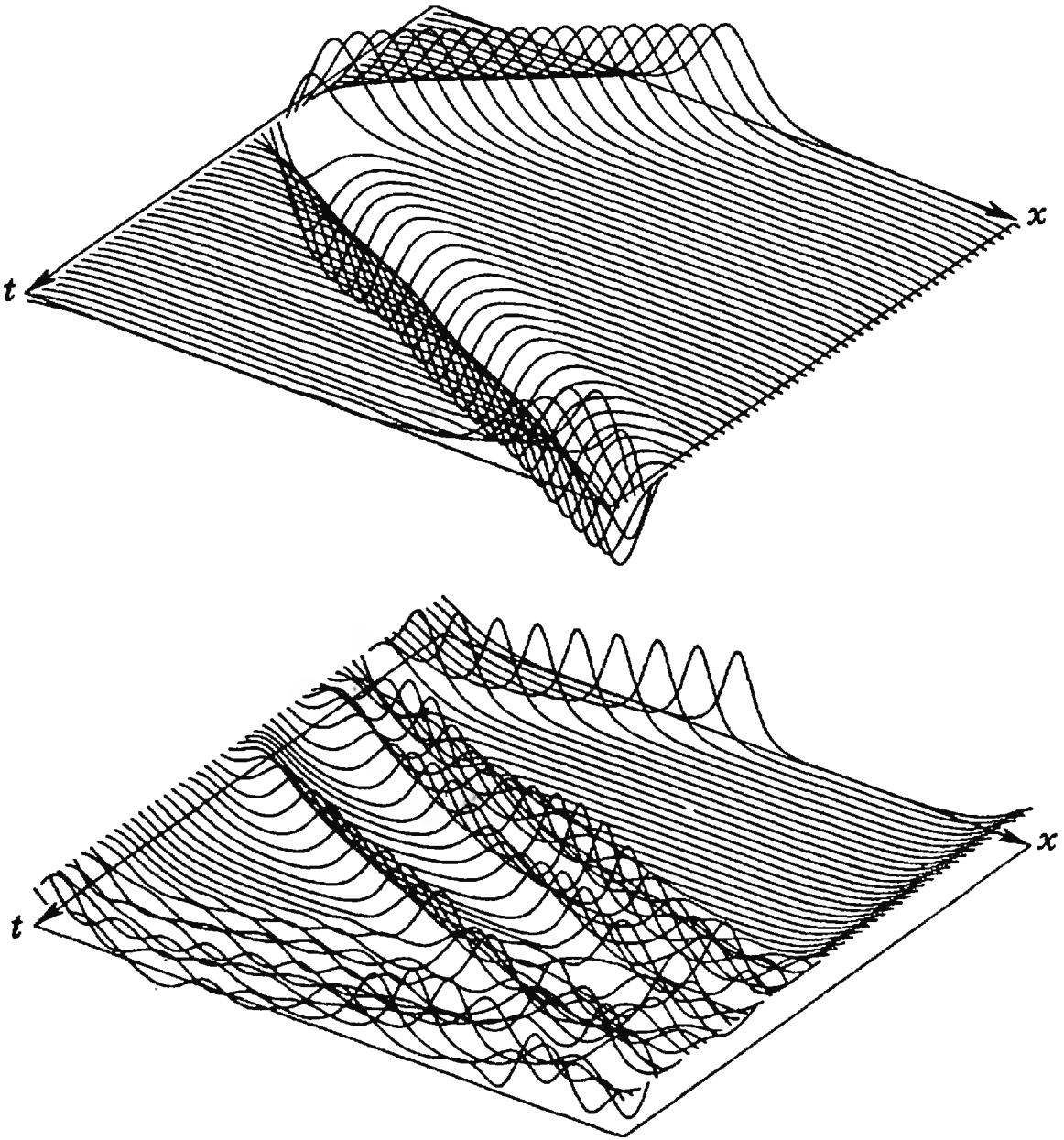


# квант

**11**  
**1983**

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





На этих рисунках изображено распространение отдельной волны: волна «бежит» вдоль оси  $x$ , и каждая волнистая линия — как бы ее мгновенная фотография; сделаны эти фотографии через равные промежутки времени с постоянной скоростью, и форма ее остается неизменной. Такие удлиненные волны — их называют солитонами — могут возникать при определенных условиях в самых разных средах — в воде, в плазме, в полупроводниках

и сверхпроводниках, в цепочке последовательно соединенных атомов и т. д. Хотя физическая природа волн, возникающих в столь разных системах, может быть различна, уравнения, описывающие их распространение, оказываются сходными или даже идентичными по виду. В этом номере журнала мы помещаем статью «Солитоны», в которой рассказывается об истории открытия солитонов, об исследовании их свойств, о практическом использовании этих свойств.

Научно-популярный  
физико-математический журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР

**Квант** 11 1983

Основан в 1970 году



Издательство «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы



**В НОМЕРЕ:**

- 2 В. Н. Губанков. Солитоны  
10 Р. В. Галиулин. Как устроены кристаллы  
17 С. Г. Гиндикин. Леонард Эйлер

**IN THIS ISSUE:**

- V. N. Gubanov. Solitons  
R. V. Galulin. How are crystals made  
S. G. Gindikin. Leonard Euler

- 24 **Новости науки**  
Л. Г. Асламазов. ЭВМ на  
сверхпроводниках

- Science news**  
L. G. Aslamosov. Computers on  
superconductors

- 25 **Школа в «Кванте»**  
Физика 8, 9, 10

- Kvant's school**  
Physics 8, 9, 10

- 31 **«Квант» для младших школьников**  
Задачи  
32 В. С. Данюшенков. Электронный глаз

- Kvant for younger school-children**  
Problems  
V. S. Danyushenkov. Electronic eye

- 36 **Задачник «Кванта»**  
Задачи М831—М835; Ф843—Ф847  
39 Решения задач М816, М817, М819, М820;  
Ф828—Ф832

- Kvant's problems**  
Problems M831—M835; P843—P847  
Solutions M816, M817, M819, M820;  
P828—P832

- 45 **Информация**  
Омскому НОУ — 15 лет

- Information**  
15 years of the Omsk school research  
society

- 46 **Олимпиады**  
С. В. Резниченко, А. М. Слинько.  
XVII Всесоюзная олимпиада по  
математике  
49 Ю. А. Самарский. XVII Всесоюзная  
олимпиада по физике  
52 В. А. Орлов. Экспериментальный тур  
олимпиады по физике  
56 Призеры XVII Всесоюзной олимпиады  
школьников

- Olympiads**  
S. V. Reznichenko, A. M. Slinko. The  
XVIIth All-Union mathematics olympiad  
Yu. A. Somarski. The XVIIIth All-Union  
physics olympiad  
V. A. Orlov. Experimental round in the  
physics olympiad  
Prizewinners of the XVIIth All-Union school  
olympiad

- 58 **Ответы, указания, решения**

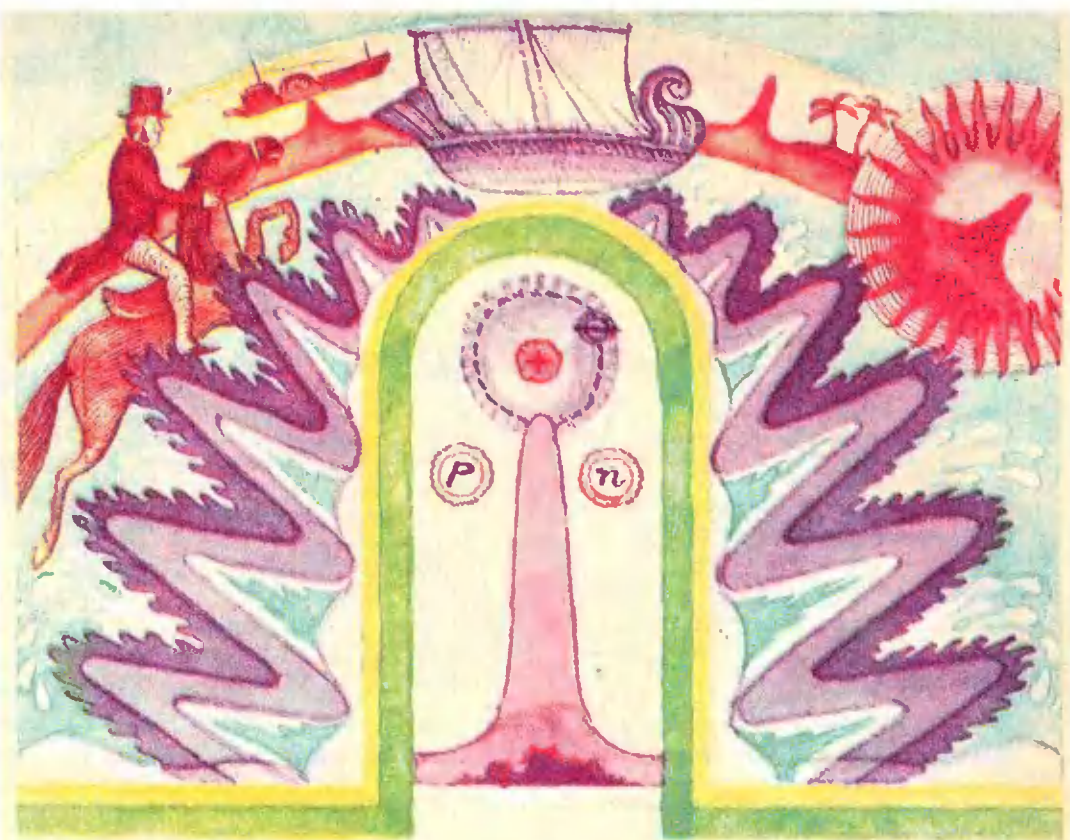
- Answers, hints, solutions**

Смесь (23, 30, 44)  
Шахматная страничка  
Связка (3-я с. обложки)

**Miscellaneous (23, 30, 44)**  
**The chess page**  
**Pinning (3 rd cover page)**

На первой странице обложки — кристалл исландского шпата (найден на реке Нижняя Тунгуска) О симметрии кристаллов читайте в статье Р. В. Галиулина





## Солитоны

*Доктор физико-математических наук  
В. Н. ГУБАНКОВ*

История исследований солитонов — этих необычных уединенных воли — началась с довольно неожиданного и удивительного события.

В начале 30-х годов прошлого столетия в городе Эдинбурге, в Шотландии, в местном университете читал курс лекций по натурфилософии Джон Скотт Рассел, молодой ученый, будущий известный инженер и кораблестроитель. В то время обсуждались возможности организации пароходного судоходства по внутренним каналам Англии, и к Расселу обратился с просьбой дать консультацию и заключения по этому поводу. В этой связи Рассел начал изучать особенности распространения волн на воде. Результаты его наблюдений были затем обобщены им и послужили основой для обширного цикла экспериментальных и теоретических

исследований, выполненных впоследствии уже другими учеными.

Однажды Рассел сехал верхом вдоль канала и наблюдал за движением баржи, которую сравнительно быстро тянула пара лошадей. Вдруг баржа резко остановилась; однако масса воды, увлеченная ее движением, по свидетельству самого Рассела, «... собралась у носа судна, ... затем вдруг оторвалась от него и стала перемещаться вперед довольно быстро, принимая форму одиночного, ярко выраженного возвышения, плавного и округлого, которое продолжало двигаться вдоль канала, не изменяя своей формы и не уменьшая скорости. Я последовал за ним на лошади и, догнав, установил, что оно движется со скоростью 8—9 миль в час и сохраняет свою первоначальную форму: около 30 футов длиной по фронту, полтора фута шириной и около фута высотой. Проехав мили три, я потерял его из виду в волнах при повороте канала».

Изучая особенности движения судов в канале, Рассел заметил, что ко-

гда скорость баржи приближалась к некоторому критическому значению (в описанных Расселом экспериментах — около 14 км/ч), буксировать баржу становилось все труднее. Однако если эта скорость, наконец, достигалась, картина резко менялась: появлялась уединенная волна, тянуть баржу становилось легче — волна как бы несла ее на себе. При остановке баржи волна отрывалась и уходила вперед — начинала самостоятельную жизнь.

Вопрос об уединенных волнах, возникающих на поверхности воды, активно изучался и теоретически, и экспериментально, начиная с середины XIX века. Причиной пристального внимания к ним исследователей был не только чисто физический интерес, но и практические выводы для судоходства. В истории судостроения известны случаи, когда образование уединенной волны не давало возможности кораблям преодолеть критическую скорость, несмотря на то, что двигатели работали на полную мощность. При этом критическая скорость была намного меньше предельной скорости, предусмотренной при проектировании корабля. Бывали также случаи отрыва уединенной волны от корабля, движущегося на расстоянии нескольких километров от берега. Такая волна достигает в высоту пяти и более метров, она распространяется достаточно быстро и, дойдя до мелководья вблизи берега, сметает все на своем пути.

Родственным видом наблюдавшихся Расселом уединенных волн являются цунами — морские или океанские волны, возникающие, как правило, при сильных подводных землетрясениях. Из-за быстрого сдвига земной коры на дне океана водяной столб, находящийся над местом деформации дна, вследствие пренебрежимо малой сжимаемости воды резко смещается в вертикальном направлении; в результате образуется уединенная волна. Возникающие в океане в области с большой глубиной волны цунами имеют относительно большую скорость — от ста до тысячи километров в час; их высота обычно колеблется от одного до десяти метров. Однако когда волна достигает

прибрежных районов с изрезанным рельефом, ее высота увеличивается и может достигать пятидесяти метров. Такие волны особенно хорошо известны в районах Тихого океана, где достаточно часто происходят подводные вулканические извержения и сдвиги земной коры. Цунами не раз обрушивались на берега Камчатки, Северной Америки, островов Японии.

Довольно долгие исследования возникновения и распространения уединенной волны на воде позволили сделать некоторые интересные выводы. Оказалось, что критическая скорость корабля или, что то же самое, скорость движения уединенной волны тем выше, чем больше глубина канала, моря, океана. По приближенным оценкам значение критической скорости близко к величине  $\sqrt{gh_0}$ , где  $h_0$  — толщина слоя воды в отсутствие волны. (Попробуйте сами получить эту оценку.) Нетрудно подсчитать, что при  $h_0 \approx 10$  м скорость уединенной волны приблизительно равна 35 км/ч. Так что на относительно неглубокой воде такая волна образуется при реальных скоростях современных кораблей (порядка нескольких десятков км/ч). Если же корабль пройдет участок мелководья и выйдет на глубокую воду, волна может отделиться от него и начать самостоятельную жизнь.

Уединенные волны, подобные той, что была впервые описана Расселом, получили название солитонов (от английского слова *solitary* — одинокий, уединенный).

Чем же отличаются солитоны от обычных волн и почему они вызывают большой интерес у ученых, специализирующихся в различных областях физики — от гидродинамики до физики плазмы, твердого тела, элементарных частиц?

Рассмотрим условия образования солитона подробнее.

Предположим, что в результате какого-либо кратковременного импульсного воздействия в среде образуется и перемещается уединенная волна. В простейшем случае, когда все части волны перемещаются с одинаковой скоростью и трение в среде пре-

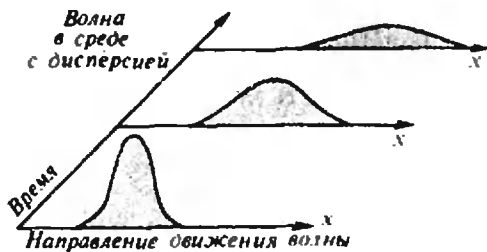


Рис. 1а.

небрежимо мало, форма волны может сохраняться сколь угодно долго. Однако в реальных условиях все происходит сложнее. Чаще всего по мере удаления от источника возбуждения волна «расползается» (рисунок 1а) и в конечном счете затухает. При наличии трения затухание происходит из-за неизбежных потерь энергии. Однако «расползание» и затухание волны наблюдаются и в средах, в которых отсутствует трение. Это возможно в том случае, если волна имеет сложную форму уже в момент ее возникновения и различные ее части движутся с различными скоростями; например, одна часть волны обгоняет ее центр, а другая отстает от него (за центр волны мы принимаем участок, соответствующий амплитуде). Такое расползание волн происходит только в средах, обладающих определенными свойствами. Эти среды называют диспергирующими (от английского слова dispersion, которое означает рассеяние, разбрасывание); при этом волны также называют диспергирующими.\*)

Форма волны может изменяться и в недиспергирующей среде в отсутствие трения. Как это происходит, показано на рисунке 1б. В начале движения профиль волны был близок к полупериоду синусоиды. По мере распространения волны профиль заметно меняется: передний фронт становится все более крутым, а задний — пологим (хотя расползания волны нет!). Через некоторое время от синусоидальной волны не остается и следа. Подобное изменение формы волны происходит в средах, которые

\*) Дисперсией называется зависимость скорости распространения волны от длины волны. Среда, в которых наблюдается эта зависимость, называют диспергирующими.

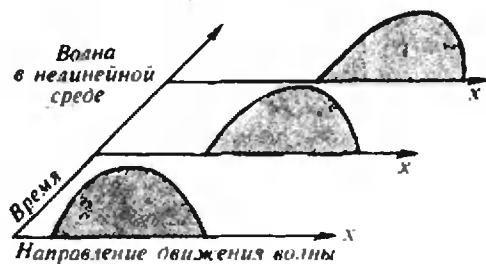


Рис. 1б.

называют нелинейными. Соответственно, волны, образующиеся в таких средах, называют тоже нелинейными.\*)

Нелинейные среды и волны прежде всего привлекают внимание исследователей, интересующихся различными вопросами распространения и взаимодействия волн. Именно в нелинейных средах проявляются разнообразные виды преобразования волн различной природы и различных частотных диапазонов. Нелинейным эффектам обязаны своим существованием многочисленные приборы — генераторы и усилители электромагнитных сигналов, умножители и делители частоты, модуляторы и т. п. Нелинейные волновые явления играют важную, порой определяющую роль при движении кораблей, полете самолетов и ракет, распространении радиоволн в земной атмосфере.

Распространение уединенной волны неизменной формы в среде, не обладающей дисперсией и нелинейными свойствами, представляется совершенно естественным. Самое интересное и удивительное заключается в том, что уединенная волна может распространяться, сохраняя скорость и форму неизменными, в сугубо нелинейной среде с дисперсией! Оказывается, эффект изменения формы волны вследствие дисперсии (расползание) может полностью компенсироваться изменением формы вследствие нелинейности. В результате «наложения» этих двух эффектов в среде распространяется волна, форма которой подобна той, что изображена

\*) Нелинейными называют среды, свойства которых зависят от состояния среды (например, диэлектрическая проницаемость среды может зависеть от напряженности электрического поля в среде).

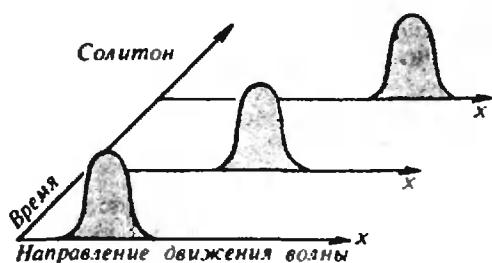


Рис. 1в.

на рисунке 1в. Такие волны и называют солитонами.

Итак, солитон — это уединенная волна, распространяющаяся в нелинейной диспергирующей среде с пренебрежимо малым трением, полностью сохраняющая свою форму.

Тот факт, что свойства уединенной волны в значительной мере зависят от свойств среды, в которой волна распространяется, был установлен теоретически в конце прошлого века математиками Д. Дж. Кортевегом и Г. де Вризом. Они показали, что среди решений уравнения волнового движения в прямоугольном канале с водой содержатся такие, которые описывают нелинейные диспергирующие уединенные волны, форма которых в процессе распространения сохраняется сколь угодно долго при отсутствии трения. Это и есть солитоны.

Следует подчеркнуть, что волна-солитон — лишь одно из довольно многих решений волновой теории Кортевега — де Вриза. Среди остальных решений мы встречаем другие, в том числе периодические, типы волн, распространяющиеся по водной поверхности в различных направлениях и с различными скоростями. Это обстоятельство полностью согласуется с результатами экспериментальных наблюдений. Например, при движении корабля со скоростями, отличными от критического значения, образуются периодические структуры волн, гребни которых направлены почти параллельно или перпендикулярно борту корабля (обычно их называют, соответственно, «косыми» и «поперечными» волнами).

Вообще говоря, решения в виде уединенных волн существуют для многих систем. Однако уединенные волны, которые изучали Кортевег и

де Вриз, имеют некоторые отличительные свойства. Эти отличия особенно наглядно проявляются при взаимодействии двух таких волн. Представим себе две уединенные волны с разными амплитудами, движущиеся в одну и ту же сторону с разными скоростями (рисунок 2, а). Согласно теории Кортевега — де Вриза более высокие волны движутся быстрее. Следовательно, левая волна на рисунке 2, а догонит правую волну. После этого в течение некоторого времени волны будут двигаться как одно целое, взаимодействуя между собой, а затем вновь разъединятся. Так вот, замечательным свойством уединенных волн Кортевега — де Вриза является то, что после взаимодействия их форма полностью сохраняется (рисунок 2, б) и каждая волна продолжает двигаться со своей прежней скоростью. (Сохранение формы и скорости после взаимодействия плюс локализация в пространстве — такое поведение уединенных волн Кортевега — де Вриза напоминает свойства некоторых элементарных частиц — электронов, протонов, нейтронов. Вот почему им дали название, похожее на название элементарной частицы.)

Термин «солитон» был предложен сравнительно недавно — в 1965 году. Однако за прошедшее время это название прочно вошло в физику нелинейных волновых процессов. Все чаще область исследований солитонов выделяют в самостоятельное научное направление, называя его условно «солитоникой».

Классическим примером солитонов являются описанные в первых экспериментальных работах Рассела уединенные волны на воде (имеются даже его замечания о сохранении формы

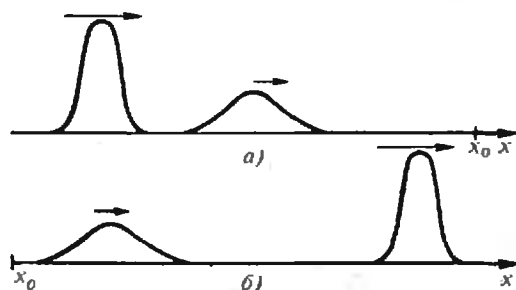


Рис. 2.

наблюдавшихся им уединенных волн после их взаимодействия). Но если бы дело ограничилось существованием солитонов только на водной поверхности, «солитоника» вряд ли привлекла бы внимание специалистов, исследующих волновые процессы в различных областях физики. Между тем солитоны встречаются во многих средах и системах, в которых вообще возможно существование волн: в плазме — ионизированном газе с большой плотностью электронов и ионов, в полупроводниках и сверхпроводниках, в цепочках последовательно соединенных атомов и т. д. Хотя физическая природа волн, возникающих в этих столь разных системах, может быть различна, уравнения, описывающие распространение этих волн, оказываются сходными или даже идентичными по виду. (Разумеется, в каждом конкретном случае входящие в эти уравнения параметры имеют свой собственный физический смысл.)

Типичным примером солитонов в твердых телах служат так называемые электрические домены, образующиеся при определенных условиях в полупроводниках. Они были обнаружены в начале шестидесятых годов английским физиком Ганном. Исследуя поведение образцов арсенида галлия — полупроводника с электронной проводимостью (то есть *n*-типа) — в достаточном сильных электрических полях, Ганн установил, что когда напряженность поля в образце достигала значения  $E \gg 3 \cdot 10^5$  В/м, в нем возникали строго периодические колебания тока с большой амплитудой; частота колебаний достигала значения  $\sim 10^9$  Гц<sup>\*)</sup>. Дальнейшие экспериментальные исследования прояснили картину появления колебаний. Оказалось, что они связаны с движением по образцу локализованной области сильного электрического поля; эта область и получила название электрического домена<sup>\*\*)</sup>.

<sup>\*)</sup> Об этом эффекте, получившем название «эффекта Ганна», было рассказано в статье М. Е. Левинштейна в 10-м номере «Кванта» за 1982 год.

<sup>\*\*)</sup> Доменом в физике называют ограниченную область, свойства которой резко отличаются от свойств окружающей их среды.

В чем причина возникновения и движения электрических доменов и почему они образуются далеко не во всех полупроводниках? Какими отличительными свойствами обладает арсенид галлия *n*-типа?

Оказывается, в отличие от других полупроводников, арсенид галлия с электронной проводимостью имеет весьма своеобразную вольтамперную характеристику. При увеличении электрического поля ток через образец сначала увеличивается, как это и предсказывает закон Ома. Однако при достижении некоторой пороговой напряженности поля  $E_{\text{пор}}$  ток начинает уменьшаться и уменьшается до тех пор, пока не достигнет некоторого минимального значения, определяемого свойствами образца; при дальнейшем увеличении электрического поля ток вновь начинает возрастать (рисунок 3,а). Такая «нелинейная» вольтамперная характеристика обусловлена зависимостью дрейфовой скорости электронов (так называют среднюю скорость установившегося движения электронов в образце) от напряженности поля в образце. Кривая, описывающая эту зависимость (рисунок 3,б), имеет такую же *N*-образную форму, как и вольтамперная характеристика на рисунке 3,а.

Представим себе, что образец из арсенида галлия включен в цепь так, как показано на рисунке 3. Что произойдет, если напряжение на образце

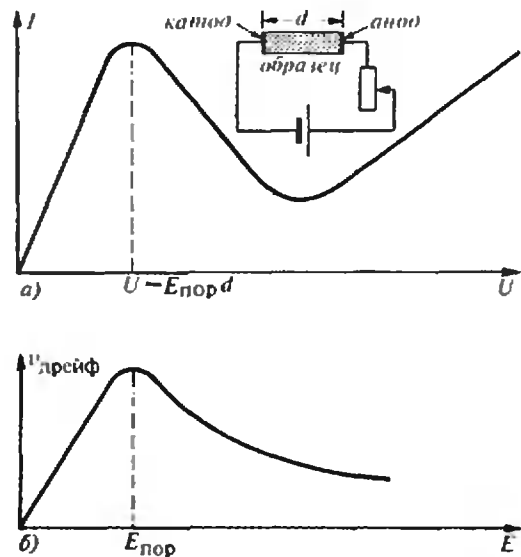


Рис. 3.



окажется несколько больше значения  $U = E_{\text{пор}} d$  и будет соответствовать тому участку вольтамперной характеристики, где ток уменьшается с ростом напряжения? Оказывается, именно при этом условии в образце возникает электрический домен. Разберемся, как это происходит.

Будем считать, что электрическое поле в образце однородно. Предположим, что за счет флуктуаций<sup>\*)</sup> в каком-либо месте образца плотность электрических зарядов в какой-то момент оказалась больше, нежели средняя плотность зарядов в остальном объеме. Напряженность электрического поля в этом месте тоже возрастает. Дрейфовая скорость электронов, находящихся в этой области сильного поля, станет меньше, чем дрейфовая скорость электронов позади и впереди флуктуации (мы должны помнить, что электроны и, следовательно, флуктуация движутся от катода к аноду образца). Таким образом, электроны, находящиеся позади, будут нагонять флуктуацию, увеличивая ее объемный заряд и напряженность электрического поля. Поэтому область сильного поля будет перемещаться все медленнее, все большее количество электронов сзади будет ее нагонять, все больше станет возрастать электрическое поле в области флуктуации. (На этом этапе формирования электрического домена наглядно проявляются эффекты дисперсии: различные области флуктуации движутся с разными скоростями.) Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока электрическое поле впереди и позади флуктуации не уменьшится до такой степени, что дрейфовая скорость электронов в этих областях начнет уменьшаться. (Понятно, что уменьшение скорости с уменьшением поля начнется с того момента, когда напряженность поля вне флуктуации станет меньше  $E_{\text{пор}}$ . С этого момента эффекты нелинейности начнут компенсировать эффекты дисперсии.)

<sup>\*)</sup> Флуктуациями называют случайные отклонения какой-либо физической величины, характеризующей систему из большого числа частиц, от ее среднего значения. Флуктуация плотности зарядов, о которой мы будем говорить, может возникнуть за счет теплового движения электронов.

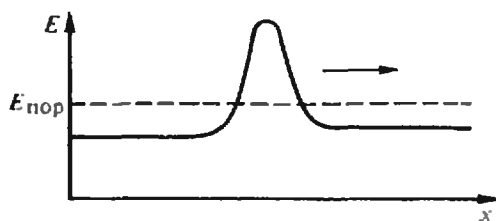


Рис. 4.

Когда скорости электронов в области сильного поля и вне нее сравняются, электрический домен можно считать сформировавшимся. В дальнейшем он будет двигаться по образцу с постоянной скоростью.

Таким образом, в примере с эффектом Ганна проявляются все свойства, присущие солитону: наличие устойчивое образование — уединенная волна (электрический домен), — которое возникает в образце с дисперсией и сильной нелинейностью и, сохраняя свою форму неизменной, движется с постоянной скоростью (рисунок 4).

Нетрудно видеть, что подобное образование и движение доменов сопровождается колебаниями электрического тока. При приложении к образцу электрического поля  $E \gg E_{\text{пор}}$  вблизи катода образуется домен с высокой напряженностью поля; следовательно, в остальной части образца поле становится меньше, уменьшается и электрический ток. При разрушении домена вблизи анода поле в объеме образца возрастает, следовательно, дрейфовая скорость электронов и электрический ток увеличиваются. Однако возрастание поля до величины  $E_{\text{пор}}$  приведет к образованию нового домена вблизи катода, процесс его движения от катода к аноду повторится. Это периодическое повторение вызывает колебания в образце электрического тока, причем период колебаний прямо пропорционален длине образца  $d$ .

Эффект Ганна сейчас активно используется в практических целях — на его основе разработаны и выпускаются промышленные образцы полупроводниковых малогабаритных генераторов электромагнитных колебаний сверхвысоких частот. Такие генераторы находят широкое применение в системах радиосвязи, приема и обработки сигналов, в радиолока-

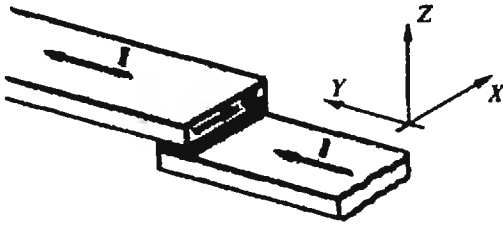


Рис 5

ции, телевидении, космических исследованиях. Можно сказать, что ганновские генераторы служат примером развития прикладной солитоники.

Расскажем еще об одном практическом использовании свойств солитонов. Уединенная волна, не меняющая своей формы при движении, — идеальный носитель информации, который может быть незаменимым при создании логических устройств, элементов памяти, при передаче и обработке информационных сигналов. Для создания логических устройств по переработке и запоминанию информации сейчас начинают использовать магнитные солитоны в слоистых сверхпроводниковых структурах. Оказывается, солитоны в виде «сгустков» магнитного потока могут перемещаться вдоль слоистой структуры, образованной сверхпроводящими электродами и изолирующей прослойкой с толщиной 20—40 ангстрем (1 ангстрем =  $1\text{Å} = 10^{-10}\text{ м}$ ). Сгусток можно перемещать вдоль контакта сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник (вдоль оси  $X$  на рисунке 5), пропуская через слоистую структуру ток. Такой сгусток локализован в пространстве (рисунок 6) и несет малую, но строго определенную порцию магнитного потока  $\Phi_0$ , равную  $h/2e = 2,07 \times 10^{-15}\text{ Вб}$  ( $h$  — постоянная Планка,  $e$  — заряд электрона). Величина  $\Phi_0$  носит название кванта магнитного потока. Необычность структуры сверхпроводник — изолятор — сверхпроводник состоит в том, что при малой толщине изолирующего слоя вследствие квантовой природы сверхпроводящих электронов возможно их просачивание через слой изолятора без потерь, то есть без нарушения сверхпроводимости системы. Сверхпроводимость сохраняется до некоторой критической скорости

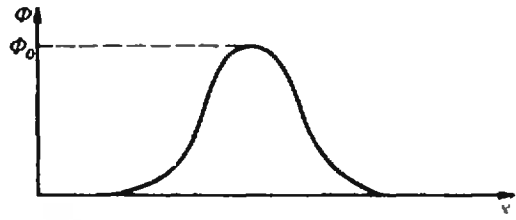


Рис 6

электронов, соответствующей критическому току  $I_c$ ; при токе, большем  $I_c$ , сверхпроводимость разрушается, появляется сопротивление, и вся структура переходит в нормальное (не сверхпроводящее) состояние. Появление и движение сгустка магнитного потока при действии внешнего магнитного поля сопровождается резким уменьшением  $I$  и изменением энергии системы в целом. Поэтому квант магнитного потока  $\Phi_0$ , присущий единичному сгустку, может служить единицей информации: например, в его отсутствие энергии системы можно приписать цифру «0», а при его наличии — цифру «1». Вопрос, однако, заключается в том, как удержать магнитный сгусток внутри слоистой структуры. Оказывается, это можно сделать, если в области изолирующего слоя искусственно создать дефект структуры, например, прямой металлический канал между сверхпроводящими обкладками, имеющий поперечные размеры порядка нескольких десятков ангстрем. Взаимодействуя с таким каналом, сгусток «зацепится» за него и останется в слоистой структуре после выключения магнитного поля. Такой элемент может служить ячейкой обработки и запоминания информации с двумя устойчивыми состояниями: одно — при наличии сгустка с единичным квантом магнитного потока  $\Phi_0$ , другое — в его отсутствие. Большое число соответствующим образом соединенных элементов дает возможность создавать системы с большой памятью и разнообразными операциями по обработке поступающей информации.

Использование солитонов в сверхпроводящих структурах для создания логических устройств по переработке и запоминанию информации является, пожалуй, одним из наиболее ярких примеров применения этих

необычных уединенных волн в практических целях. Важное преимущество создаваемых на этих принципах сверхпроводящих электронно-вычислительных машин состоит в малой величине потребляемой энергии: на одну логическую операцию расходуется не более  $10^{-19}$  Дж. Это обстоятельство даст возможность избежать перегревов твердотельных элементов, из которых будет состоять такая ЭВМ, располагать элементы достаточно близко друг к другу. Размеры самих элементов очень малы: площадь поперечного сечения каждого такого элемента обычно равна сотой или даже тысячной доле квадратного миллиметра. Поэтому сверхпроводящая ЭВМ должна быть очень компактной, ее объем не будет превышать нескольких сотен кубических сантиметров; она будет обладать лучшим быстродействием по сравнению с известными ЭВМ. По мнению ученых, ЭВМ этого типа составят основу для целого будущего поколения сверхбыстродействующих компактных ЭВМ с практически неограниченной памятью. Недаром в научной литературе эти вычислительные машины получили название «суперЭВМ». Однако малые размеры «суперЭВМ», являясь несомненным достоинством, порождают и определенные трудности: для изготовления элементов столь малых, «микронных», размеров требуется проведение целого комплекса сложных технологических операций и дорогостоящее оборудование.\*

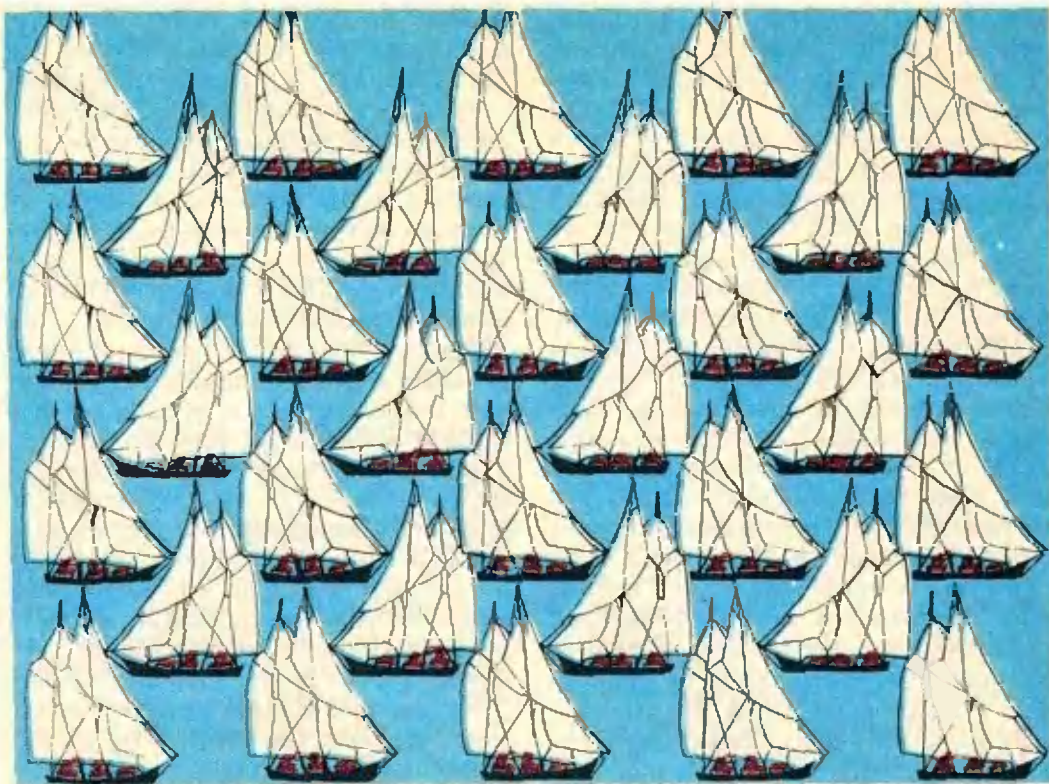
Изучение солитонов в полупроводниках и сверхпроводниках представляет интерес не только для исследователей, специализирующихся в области физики и техники полупроводников и низких температур. Дело в том, что математические уравнения, описывающие движения электрических доменов и магнитных сгустков, имеют тот же вид, что и уравнения движения уединенных волн в некоторых биологических средах, уравнения взаимодействия элементарных частиц, распространения лазерных импульсов. Решения этих уравнений

в виде уединенных волн — также одинаковы или близки, хотя, как мы уже говорили, в каждой конкретной ситуации входящие в них величины имеют различный физический смысл: в одних условиях эти решения описывают волны на воде, в других — волны электрического заряда в плазме, в третьих — электромагнитные волны, распространяющиеся по линиям передач. Многообразие этих явлений поневоле приводит нас к мысли о фундаментальности понятия «солитон», а их описание с помощью идентичных или близких по форме уравнений — о возможности моделировать процессы, скажем, в физике элементарных частиц волновыми процессами, происходящими в твердом теле. Так на конкретном примере солитонов можно проследить единство и многообразие изучаемого нами мира природы.

За полтора столетия наука о солитонах прошла большой путь: от наблюдений уединенных волн на воде до сложного и строгого математического описания с помощью солитонов взаимодействий элементарных частиц и, наконец, разработок «суперЭВМ» на сверхпроводниках. Здесь проявляется еще одно свойство фундаментальных физических явлений: за открытием и детальным исследованием, рано или поздно, но обязательно следует их активное использование в практических целях.

И еще одно, последнее. В науке о солитонах в полную меру проявились развитые в последние десятилетия математические методы анализа. Эти методы, отличающиеся строгостью и стройностью сами по себе, позволили получить столь необычное и изящное решение — одиночную волну неизменной формы, распространяющуюся в сложной нелинейной среде с дисперсией. Изящество всегда было отличительной чертой фундаментальных явлений природы, и здесь оно проявляется в полной мере. Наряду с чисто физическим интересом и многими практическими возможностями изящество солитонов составляет одну из наиболее привлекательных их черт для ученых, специализирующихся в разных областях физики, и не только физики.

\*) Проблема создания ЭВМ на сверхпроводниках посвящена заметка Л. Г. Асламазова в этом номере журнала (с. 21) (Прим. ред.)



## Как устроены кристаллы

*Доктор физико-математических наук  
Р. В. ГАЛИУЛИН*

С древнейших времен кристаллы поражали человеческое воображение своим исключительным геометрическим совершенством. Наши предки видели в них творения ангелов или подземных духов. Первой попыткой научного объяснения формы кристаллов считается произведение Иоганна Кеплера «О шестиугольных снежинках» (1611 г.). Кеплер высказал предположение, что форма снежинок (кристалликов льда) есть следствие особых расположений составляющих их частиц. Спустя три века было окончательно установлено, что специфические особенности кристаллов связаны с особыми расположениями атомов в пространстве, которые аналогичны узорам в калейдосконах. Все различные законы

таких расположений были выведены в 1891 году нашим замечательным соотечественником, родоначальником современной кристаллографии Е. С. Федоровым (1853—1919). Правильные формы кристаллических многогранников легко объясняются в рамках этих законов. И сами эти законы настолько красивы, что не раз служили основой для создания произведений искусства (см. заставку\*)).

С геометрической точки зрения расположение атомов в пространстве представляется системой точек, соответствующих их центрам. Поэтому задачу можно поставить так: требуется найти геометрические условия, выделяющие системы точек с «кристаллической структурой», причем эти условия должны быть физически оправданы. Последнее весьма существенно, коль скоро мы хотим выявить причины упорядоченного расположения атомов в кристаллах.

Простейшим геометрическим свойством систем точек, соответствующих

\*) На заставке — узор, заимствованный из Канадского минералогического журнала № 19 за 1981 г.



центрам атомов в любых атомных совокупностях (а не только в кристаллах), является дискретность.

**Условие дискретности.** *Расстояние между любыми двумя точками системы больше некоторой фиксированной величины  $r$ .* Физическая очевидность этого условия не вызывает сомнений.

Стремление атомов равномерно расположиться в пространстве можно отразить следующим ограничением на соответствующую систему точек:

**Условие покрытия.** *Расстояние от любой точки пространства до ближайшей к ней точки системы меньше некоторой фиксированной величины  $R$ .*

Название этого условия объясняется тем, что если система точек ему удовлетворяет, то шары радиуса  $R$  с центрами в этих точках покрывают все пространство (докажите!).

Условие дискретности не позволяет точкам системы располагаться слишком густо, а условие покрытия — слишком редко. Совместно эти два требования обеспечивают примерно равномерное расположение точек в пространстве. Системы точек, удовлетворяющие этим двум условиям одновременно, называются *системами Делоне*, в память об известном нашем геометре Б. Н. Делоне (1890—1980), впервые выделившем эти системы.

Простейший пример системы Делоне (на плоскости) — это множество узлов бесконечного листа клетчатой бумаги. В кристаллографии системы такого типа играют очень важную роль и мы еще поговорим о них подробно. Из этой системы можно получить систему Делоне более общего вида, если произвольно сдвинуть каждый узел на расстояние, не превосходящее, скажем,  $1/3$  расстояния между соседними узлами (рис. 1).

**Упражнение 1.** Докажите, что указанные системы точек действительно удовлетворяют условиям дискретности и покрытия; найдите для них значения  $r$  и  $R$ .

Системы Делоне служат наиболее общей геометрической моделью расположения атомов в любом атомном образовании. Поэтому любую теоре-

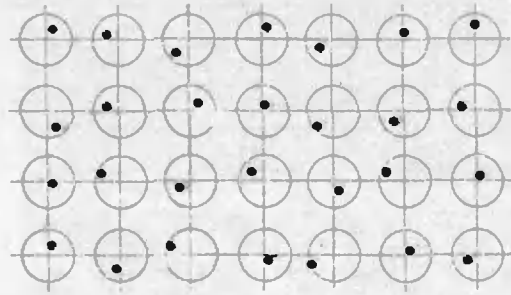


Рис. 1.

му об этих системах можно интерпретировать как свойство такого расположения. Этим обусловлена важность теории систем Делоне для приложений. Но сейчас нас интересует не общая теория систем Делоне (только начинающая развиваться), а некоторые их частные случаи — системы, описывающие расположе-

*Член-корреспондент АН СССР Борис Николаевич Делоне (1890—1980) — известный геометр, ведущий советский «математический кристаллограф», заслуженный мастер альпинизма, организатор первых школьных математических олимпиад. Ему принадлежит одна из первых работ по практическому применению теории чисел в кристаллографии. «Кристаллограф» — говорил Борис Николаевич, — в силу постоянного общения с кристаллами уже интуитивно является геометром.*



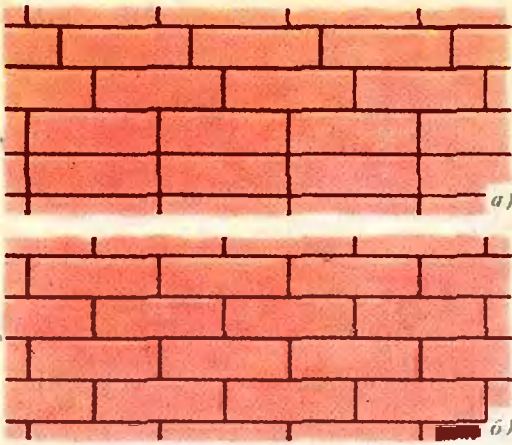


Рис. 2. Кирпичные кладки: а) несимметричная, б) симметричная.

ние центров атомов в кристаллических структурах. Чтобы выделить эти системы, мы воспользуемся важнейшим геометрическим свойством кристаллов — симметрией.

Что такое симметрия? Интуитивно каждый из нас умеет отличать симметричное от несимметричного. Симметричные тела всегда можно разбить на равные части и даже многими способами. Но этого свойства еще не достаточно для определения симметрии. Бесконечная кирпичная кладка, фрагмент которой приведен на рисунке 2, а, несимметрична, хотя и составлена из равных кирпичиков. А вот кирпичная кладка рисунка 2, б симметрична. В ней каждый кирпичик равно окружен всеми другими кирпичиками. Равенство (или конгруэнтность) двух частей фигуры означает, что их можно совместить перемещением. Их «равное окружение» — что это перемещение можно

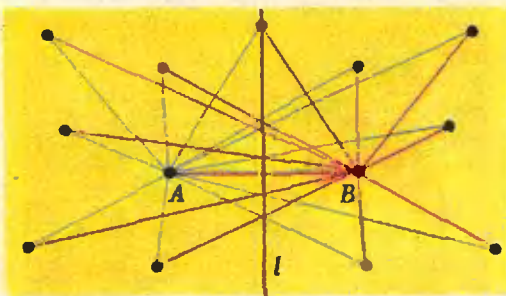


Рис. 3. Фрагмент симметричной системы Делоне. Ее единственное нетождественное преобразование симметрии — это осевая симметрия  $S_l$ . Точки  $A$  и  $B$  имеют равные глобальные звезды.

выбрать так, чтобы и вся фигура перешла сама в себя. Перемещение, переводящее некоторую фигуру в себя, называется ее *преобразованием симметрии* или *самосовмещением*. Итак, фигура симметрична, если она имеет хотя бы одно преобразование симметрии (отличное от тождественного).

Упражнение 2. а) Найдите все преобразования симметрии правильного  $n$ -угольника. б)\* Докажите, что куб имеет 48 преобразований симметрии (с учетом зеркальных перемещений) и найдите их.

Множество всех преобразований симметрии данного объекта, рассматриваемое вместе с операцией композиции этих преобразований, называется *группой симметрий* (или *самосовмещений*) этого объекта. С этим важным математическим понятием, лежащим на стыке геометрии и алгебры, можно познакомиться, например, по книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (М., «Наука», 1980).

Итак, системы Делоне, отвечающие кристаллам, должны быть симметричны. Такие системы можно описать и опираясь на понятие равного окружения. Для этого соединим произвольную точку  $A$  системы Делоне со всеми остальными ее точками (рис. 3). Так полученную бесконечную совокупность отрезков назовем *глобальной звездой точки  $A$*  в данной системе. В общем случае глобальные звезды разных точек системы не равны друг другу. Но ясно, что если в системе окажется хотя бы две точки с равными глобальными звездами, система будет уже симметричной. Верно и обратное утверждение: всякая симметричная система Делоне содержит точки с равными глобальными звездами. Таким образом, равенство глобальных звезд хотя бы у двух точек системы Делоне есть необходимое и достаточное условие симметричности этой системы.

Упражнения

3. Докажите, что в любой симметричной системе Делоне найдется бесконечно много пар точек с равными глобальными звездами.

4. Постройте плоскую систему Делоне, которая переходит в себя при повороте на  $90^\circ$ ; на  $60^\circ$ .

5. Докажите, что если поворот на угол  $\alpha$  является преобразованием симметрии некоторой плоской фигуры, то повороты на углы



па (где  $n$  — любое целое число) с тем же центром — тоже ее преобразование симметрии, а если эта фигура — система Делоне, то отношение  $a/d$  должно быть рационально.

Но не всякая симметричная система Делоне соответствует центрам атомов в кристаллических структурах. Симметрия кристаллов специфична. Например, среди кристаллических многогранников нет правильных додекаэдров и икосаэдров и вообще многогранников, имеющих оси симметрии 5-го порядка (то есть «самосовмещающихся» при поворотах на угол  $2\pi/5$  около этих осей). Как объяснить такую привередливость кристаллических форм?

В 1783 году французский аббат Р. Ж. Гаюи, минералог по призванию, высказал предположение, что всякий кристалл составлен из параллельно расположенных равных частей, смежных по целым граням (рис. 4). В 1824 году ученик великого Гаусса, профессор физики во Фрайбурге Л. А. Зеебер для объяснения расширения кристаллов при нагревании предложил заменить многогранники Гаюи их центрами тяжести. Такие системы точек были названы «решетками».

Более строго, *решеткой* называется множество всех точек с целочисленными координатами относительно произвольной (необязательно прямоугольной) системы координат (рис. 5.а—в). Точки решетки называются *узлами*. Очевидно, что система координат однозначно определяет решетку. Но обратное утверждение не верно: в данной решетке определяющую ее систему координат можно выбрать бесконечным числом способов (рис. 5.б). Легко проверить, что решетки удовлетворяют условиям дискретности и покрытия, то есть являются системами Делоне. Докажем теперь их симметричность. Справедлива следующая

**Лемма о решетке.** *Всякая решетка переходит в себя при параллельном переносе на вектор, соединяющий любые два ее узла, а также при центральной симметрии относительно любого узла.*

Для доказательства первого утверждения заметим, что вектор  $\overline{AB}$ , где  $A$  и  $B$  — узлы решетки, имеет целые координаты (равные разности

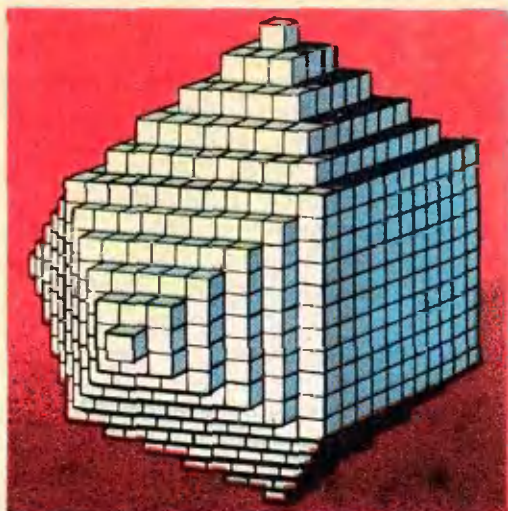


Рис. 4. Строение кристаллов по Р. Ж. Гаюи.

ствям соответствующих координат точек  $A$  и  $B$ ). Перенос на этот вектор равносильен прибавлению к координатам каждого узла целых чисел (координат вектора). Поскольку в результате получаются целые числа, каждый узел переходит в узел той же решетки. Доказательство утверждения о центральной симметрии оставим читателю.

Именно решетчатое строение кристаллов обуславливает специфику их

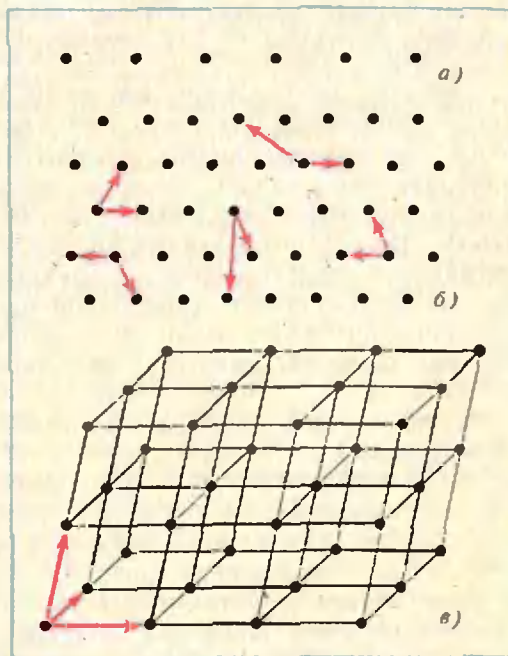


Рис. 5. Решетки: а) одномерная, б) двумерная (плоская сетка), в) трехмерная. Красными стрелками показаны базисные векторы задающих эти решетки систем координат.

симметрии. Всякая решетка бесконечным числом способов разбивается на бесконечные совокупности конгруэнтных и параллельно расположенных плоских сеток (двумерных подрешеток, рис. 5, в). Принято считать, что плоскости всех граней кристалла обязательно содержат в себе плоские сетки какой-либо одной общей решетки. Плоские сетки решетки, связанные преобразованиями симметрии, не отличимы друг от друга. Поэтому при росте кристалла соответствующие им грани растут одинаково. Так симметрия кристалла повторяет симметрию решетки.

Докажем теперь, что кристалл не может иметь ось симметрии 5-го порядка. Допустим, что такой кристалл существует. Тогда соответствующая ему решетка тоже имеет ось 5-го порядка  $l$ . Проведем через любой узел плоскость, перпендикулярную  $l$ , и выберем в этой плоскости узел  $A$ , ближайший к  $l$  (существование такого узла нетрудно вывести из условия дискретности). Поскольку решетка переходит в себя при поворотах на углы, кратные  $2\pi/5$ , вокруг оси  $l$ , образы точки  $A$  при поворотах являются узлами решетки. Они образуют правильный пятиугольник  $ABCDE$  (рис. 6). Если сдвинуть решетку на вектор  $\vec{AB}$ , то по лемме о решетке узел  $E$  должен перейти в некоторый узел  $N$ , лежащий внутри пятиугольника. Но это невозможно, так как точка  $N$  расположена ближе к оси  $l$ , чем  $A$ .

Упражнение 6. Постройте решетки, имеющие оси симметрии 2-го, 3-го, 4-го, 6-го порядков. Докажите, что осей выше 6-го порядка решетка иметь не может.

Отметим, что в мире растений и мелких организмов (вирусов) часто встречаются индивиды, обладающие осями 5-го порядка. По общему выражению нашего выдающегося кристаллографа академика Н. В. Белова (1891—1982), «пятерная ось является у мелких организмов своеобразным инструментом борьбы за существование, страховкой против окаменения, против кристаллизации, первым шагом которой была бы «поймка» решеткой живого организма».

Но не все известные о кристаллах факты укладывались в рамки решетчатой модели. Один из таких фактов — это существование нецентросимметричных кристаллических многогранников, таких как кристаллы драгоценного камня турмалина (рис. 7) (по лемме о решетке все решетки центросимметричны). Для объяснения подобных явлений потребовалось расширить арсенал допустимых расположений частиц в пространстве. Известный немецкий кристаллограф Л. Зонке в 1879 году высказал предположение, что частицы в кристаллах располагаются по *правильным системам*.

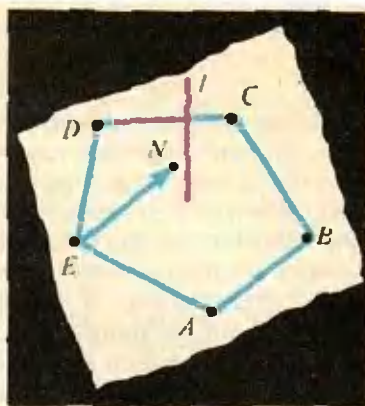


Рис. 6.



Рис. 7. Кристалл турмалина.

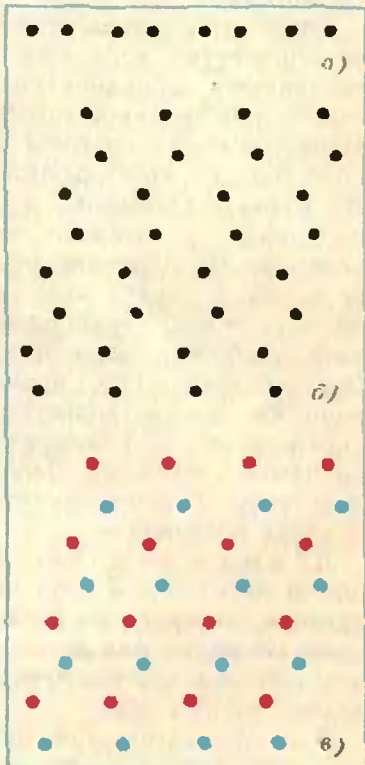


Рис. 8. Правильные системы точек: а) одномерная, б) двумерная, в) разложение правильной системы на решетки.



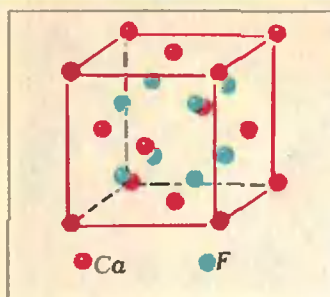


Рис. 9. Структура флюорита, составленная из двух различных правильных систем (зеленые точки — атомы фтора, красные — кальция).

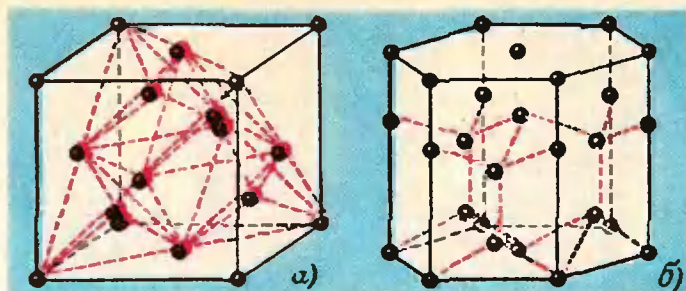


Рис. 10. Структура а) алмаза, б) лонсдейлита.

Система Делоне называется *правильной*, если из каждой ее точки вся система видна одинаково, то есть если глобальные звезды всех точек этой системы равны друг другу (рис. 8, а—в). Если бы наблюдатель заснул на какой-либо точке правильной системы и в это время его перенесли бы на другую точку этой системы, он бы и не заметил этого. Другими словами, любую точку правильной системы можно перевести в любую другую преобразованием симметрии всей системы. Группы симметрии правильных систем называются *федоровскими* или *пространственными кристаллографическими группами*. Имеется 230 различных федоровских групп (плоских кристаллографических групп значительно меньше — всего 17; самосовмещения узора, изображенного на заставке, представляют одну из этих групп). Они и задают те законы расположения атомов в кристаллических структурах, о которых мы упоминали в начале статьи.

**Упражнение 7.** Плоскость можно замостить одинаковыми правильными треугольниками без просветов и перекрытий. Докажите, что их вершины образуют правильную (плоскую) систему Делоне и опишите все ее преобразования симметрии. Сделайте то же самое для квадратов и правильных шестиугольников. Все ли эти системы являются решетками?

Из леммы о решетке следует, что любая решетка является правильной системой. Обратное неверно, но можно показать, что всякая правильная система составлена из конгруэнтных и параллельно расположенных решеток (рис. 8, в). Доказательство этого не простого факта наметил Е. С. Федоров в своей знаменитой книге «Начала учения о фигурах», работу над

которой он начал 16-летним юношей. Провел это доказательство А. Шенфлис, но оно оказалось настолько сложным, что в первом издании книги о симметрии кристаллических структур в 1891 году он поместил это доказательство в самом конце, дабы не устроить читателя. Б. Н. Делоне совместно со своим учеником М. И. Штогриным упростили это доказательство, но не настолько, чтобы можно было изложить его здесь.

В начале нашего века было экспериментально подтверждено, что атомы в кристаллических структурах образуют одну или несколько правильных систем с общей федоровской группой (рис. 9). Но это утверждение не вскрывает причин упорядочения, а только констатирует факт его существования. Об этом говорил основатель советской кристаллографии академик А. В. Шубников (1887—1970): «Мы хорошо знаем, как устроен кристалл, но почему он так устроен, этим никто серьезно не занимался».

Представим себе растущий кристалл. Вот очередной атом включается в его структуру. Что заставляет этот атом занять предписанное ему строго определенное место? Для того чтобы не нарушить правильность системы (в смысле данного выше определения), он должен «знать» и «учитывать» положения всех других атомов, в том числе очень далеких. Было бы вполне естественно потребовать, чтобы каждый атом был равно окружен всеми атомами, удаленными от него на какое-то сравнительно небольшое расстояние (определяемое областью действия химических свя-

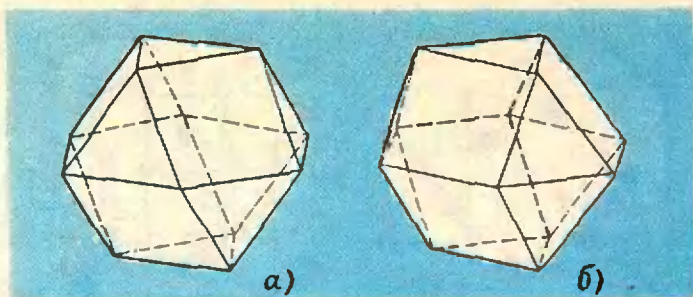


Рис. 11. Вторые координационные сферы в структурах: а) алмаза, б) лонсдейлита.



Рис. 12.

зей атомов). Оказывается, что уже такое ослабленное условие обеспечивает правильность системы! Справедлива следующая

**Локальная теорема.** Если все точки системы Делоне равно окружены в сфере радиуса  $kR$ , где  $k=4$  для плоских систем и  $k=10$  — для пространственных, то эта система правильная. (Напомним, что  $R$  — это параметр из условия покрытия.) Эту теорему доказал М. И. Штогрин. Имеются основания предполагать, что и в трехмерном случае в локальной теореме можно взять  $k=4$ . Однако это пока не доказано.

Фундаментальное значение локальной теоремы состоит в том, что требуемая ею область равного окружения примерно такая же, как область действия химических связей атома. Следовательно, образование кристаллических структур можно объяснить, исходя из химического взаимодействия составляющих их атомов.

Теперь можно сформулировать третье естественное условие, которое вместе с условиями дискретности и покрытия выделяет правильные системы Делоне:

**Условие локального равенства.** Все точки системы равноокружены в сфере радиуса  $10R$ . (Еще раз подчеркнем, что число 10, вероятно, можно заменить здесь на 4.)

Посмотрим теперь на примере алмаза, что произойдет, если уменьшить область равного окружения.

Каждый атом углерода в структуре алмаза окружен ближайшими атомами по правильному тетраэдру (рис. 10, а), что хорошо согласуется с устройством его электронной оболочки, способной обеспечить 4 равно-

ценные связи. Но ровно такое же окружение имеют атомы и в другой модификации углерода — лонсдейлите (рис. 10, б), микрокристаллики которого пока находят только в кратерах больших метеоритов.

Чем же отличаются друг от друга структуры алмаза и лонсдейлита? В структуре алмаза атомы, находящиеся на второй сфере, окружающий исходный атом (на второй координационной сфере), образуют архимедов кубоктаэдр — куб с отрезанными углами (рис. 11, а). В структуре лонсдейлита атомы второй координационной сферы образуют так называемый гексагональный кубоктаэдр, который получается из архимедова поворотом его нижней половины на  $180^\circ$  (рис. 11, б). Если потребовать, чтобы атомы углерода имели одинаковое окружение в пределах первых двух координационных сфер, то они образуют одну из этих двух структур в чистом виде — будут получаться монокристаллы.

Если же атомы углерода способны установить связи только в пределах первой координационной сферы (то есть образовать только правильные тетраэдры), то могут возникнуть смешанные структуры, в которых слои алмаза чередуются со слоями лонсдейлита. Это происходит, например, в так называемых *двойниках* (рис. 12), в которых два кристалла алмаза соединены друг с другом по слою лонсдейлита.

Конечно, проблема образования кристаллических структур еще далека от полного решения. Мы лишь постарались показать, какую важную роль в этой, казалось бы, чисто физико-химической проблеме, играет математика.



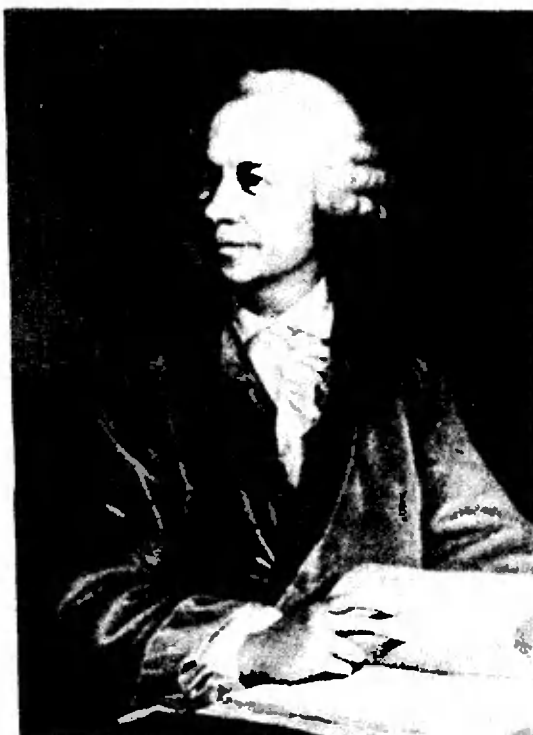
# Леонард Эйлер

(к 200-летию со дня смерти)

Кандидат  
физико-математических наук  
С. Г. ГИНДИКИН

## Великое наследие

Научное наследие Эйлера поражает совершенно беспрецедентными размерами. При жизни увидели свет его 530 книг и статей. Последние годы жизни академические издания не справлялись с потоком научной продукции слепого ученого, и он шутливо обещал графу В. Н. Орлову, что его работы будут заполнять «Комментарии» Академии в течение 20 лет после его смерти. Эта оценка оказалась «оптимистической»: Академия занималась изданием трудов Эйлера 47 лет. Число работ дошло до 771, но составленная в 1910 г. Энгельстромом библиография содержала 886 названий, разбитых по рубрикам: философия, математика, механика, астрономия, физика, география, сельское хозяйство. С 1910 г. Швейцарское общество естествоиспытателей издает собрание сочинений Эйлера, распространяемое по международной подписке: по предварительной оценке оно составит 75 томов большого объема. К началу 80-х годов вышло 72 тома. Восемь



Портрет Л. Эйлера работы Э. Хансмана (1756 г.)

дополнительных томов должна составить научная переписка Эйлера.

Такой объем отражает не только поразительную скорость, с которой работал Эйлер, но и привычку систематически печатать научные тексты, в том числе и сравнительно спешно подготовленные. Большой разброс тематики отражает не только широту интересов и умение быстро войти в далекие области науки, но и многочисленные академические обязанности как в Петербурге, так и в Берлине. Некоторые публикации носят характер коротких реплик. Эйлер легко входил в научные контакты, давал разнообразные консультации, охотно думал над случайными, изолированными задачами, сообщаемыми его корреспондентами. Может показаться, что ученый разбрасывался, проявляя всеядность, но это только на первый взгляд. Случайные вопросы и задачи служили питательной почвой для хорошо спланированных размышлений. Эйлер умел своевременно останавливаться в своих раздумьях, если не видел реалистической возможности двигаться вперед. Он умел организовать свою жизнь так, чтобы много-

Окончание. Начало — в предыдущем номере.

численные текущие дела не сильно отражались на основном направлении его работы.

Как это ни парадоксально, без большого преувеличения можно сказать, что всю свою жизнь Эйлер занимался почти исключительно математикой. В других областях науки (например, механике или астрономии) успех его был прежде всего связан с применением математических методов. Его философская установка на протяжении всей его жизни состояла в том, что естественно-научные открытия должны получаться путем теоретической (в значительной степени математической) обработки небольшого числа общих, несомненных принципов. В своей швейцарской диссертации девятнадцатилетний Эйлер пишет: «Я не считал необходимым подтвердить эту новую теорию опытом, потому что она полностью выведена из самых надежных и неопровержимых принципов механики и, таким образом, сомнение в том, верна ли она и имеет ли место в практике, просто не может возникнуть». Даже законы Ньютона Эйлер пытался вывести из более общих принципов, а в небесной механике он стремился не получать эмпирические формулы из обработки результатов наблюдений, а делать выводы непосредственно из закона всемирного тяготения. Как правило, он двигался от теории к практике. Хотя Эйлер и был всю жизнь связан с экспериментом, это не было его сильной стороной. Академик С. И. Вавилов писал: «...гений Эйлера был, по существу, математический... он плохо чувствовал эксперимент (хотя сам и экспериментировал)...»; в другом месте: «Математическому гению Эйлера не хватало физической интуиции Ньютона и Гюйгенса, позволявшей угадывать решение при отсутствии точной математической формулировки задачи или методов ее решения».

Не имея возможности осветить все стороны многогранной деятельности Эйлера, мы подробно остановимся лишь на его арифметических работах, в которых отчетливо проявились характерные особенности его занятий наукой

### Ученик Ферма

Первые публикации Эйлера по арифметике (теории чисел) относятся к 1732 году — пятому году пребывания в Петербурге. У Эйлера было два великих предшественника в арифметике: грек Диофант (III век) и француз П. Ферма (1601—1665). Эйлер начинает с того, что продумывает и снабжает доказательствами утверждения Ферма. Его рассуждения столь систематичны, что кажется, что это заготовки к первому учебнику высшей арифметики (который не был им написан).

В работе 1732 г. исследуется вопрос о делимости «чисел Ферма» (то есть чисел вида  $F_n = 2^{2^n} + 1$ , где  $n \in \mathbb{N}$ ) и «чисел Мерсенна» (то есть чисел вида  $M_p = 2^p - 1$ , где  $p$  — простое). Неясные вопросы относились к столь большим числам этого вида, что прямой перебор был недоступен даже такому виртуозному вычислителю, как Эйлер.

Эйлер доказал, что делители чисел  $F_n$  и  $M_p$  могут иметь лишь весьма специальный вид. Именно, делители числа  $F_n$  имеют вид  $k \cdot 2^{n+2} + 1$ ; благодаря этому, Эйлер обнаружил, что  $F_5$  делится на  $641 = 5 \cdot 2^7 + 1$ , опровергнув утверждение Ферма о простоте всех чисел  $F_n$ . Делители же числа  $M_p$  должны одновременно иметь вид,  $2pk - 1$  и  $8l \pm 1$ . Пользуясь этим, Эйлер доказал простоту числа  $M_{32} = 2\,147\,483\,647$ . С тех пор простых чисел Ферма не было обнаружено, а рекорды в мире простых чисел Мерсенна постоянно улучшаются (рекорд 1983 г. получается при  $p = 86\,243$ ). В отношении чисел Мерсенна Эйлер заполнил также пробел, оставшийся от Евклида. Евклид знал, что если  $M_p$  — простое число, то  $M_p \times (M_p + 1) / 2$  — совершенное число (то есть число, равное сумме своих собственных делителей). Эйлер доказал, что каждое четное совершенное число представимо в таком виде (не известно до сих пор, существуют ли нечетные совершенные числа).

Эйлера интересует, существуют ли многочлены  $P(n)$ , которые при всех  $n \in \mathbb{N}$  принимают простые значения. Он получает отрицательный



ответ, но замечает, что значения многочлена  $n^2 - n + 41$  просты при всех  $n < 40$ .

Эйлер снабжает доказательством «малую теорему Ферма», утверждающую, что число  $a^{p-1} - 1$ , где  $a \neq 0$  — целое, а  $p$  — простое, делится на  $p$ . Но, не ограничившись этим, он находит и доказывает ее обобщение на непустой делитель: если  $a$  и  $m$  взаимно просты, то  $a^{\varphi(m)} - 1$  делится на  $m$  (здесь  $\varphi(m)$  — число натуральных чисел, взаимно простых с  $m$  и меньших  $m$ ; при простом  $p$ ,  $\varphi(p) = p - 1$ )\*). Обнаружив, что функция натурального аргумента  $\varphi(m)$  (ее назовут *функцией Эйлера*) обладает замечательными свойствами, он тем самым открывает важную главу теории чисел — *теорию арифметических функций*. Эйлер двигается очень логично. Он подмечает, что для некоторых  $a$  число  $a^k - 1$  при  $k < p - 1$  не делится на  $p$ . В этом случае  $a$  называют *первообразным корнем* по модулю  $p$ . Эксперимент убеждает Эйлера, что первообразные корни существуют для всех простых  $p$ , но доказать этого он не смог (доказательство нашли позднее Лежандр и Гаусс). Эйлер умел доказывать трудные теоремы, но он умел и трезво оценивать свои возможности. Он никогда не концентрировал размышления над одной трудной задачей на годы, а наступал на математические тайны широким фронтом.

Еще одно утверждение, сформулированное Ферма без доказательства, привлекло внимание Эйлера. Речь идет о представимости квадратов  $n^2$  в виде  $kp - 1$ , где  $p$  — простое,  $k \in \mathbb{Z}$ . Ферма утверждал, что для всякого простого  $p$  вида  $4l + 1$  существует квадрат вида  $kp - 1$ , а для  $p = 4l - 1$  таких квадратов не существует. В 1747 г. Эйлер доказал это утверждение, а затем выдвинул следующую общую гипотезу: *квадраты вида  $kp + a$  ( $p$  — простое,  $k, a \in \mathbb{Z}$ ) существуют или не существуют одновременно для всех простых  $p$  из арифметической прогрессии  $b + 4al$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ )*. Это утверждение те-



Медаль Берлинской Академии наук в честь 250-летия со дня рождения Л. Эйлера (1957 г.)

перь называется «квадратичным законом взаимности». Доказать его Эйлер не сумел: оно не поддавалось ни Лагранжу, ни Лежандру, и лишь 19-летний Гаусс нашел его доказательство.

Следующий круг вопросов, унаследованный у Ферма, но идущий еще от Диофанта, — это решение уравнений в целых числах. Эйлер доказал «Великую теорему Ферма» (см., например, «Квант», 1976, № 8, с. 12) для  $n = 3, 4$ .

Однажды Ферма предложил своим соотечественникам Френиклю и Сен-Мартену построить прямоугольный треугольник с целочисленными сторонами, у которого сумма катетов и гипотенуза — квадраты, то есть решить в целых числах систему уравнений  $x + y = u^2$ ,  $x^2 + y^2 = v^4$ . Ферма заподозрили в том, что он дал «невозможную» задачу. Эйлер исследовал эту систему, замечательную тем, что ее наименьшее решение дается 13-значными числами: 1061652293520, 4565486027761.

Эйлер рассматривает уравнение  $x^2 - Dy^2 = 1$ ,  $D \neq a^2$ , которое он называет *уравнением Пелля*. Он обнаруживает связь его наименьшего решения с разложением  $\sqrt{D}$  в бесконечную цепную дробь\*). Многочисленные примеры убеждают Эйлера, что получается периодическая цепная дробь, но доказательство этого факта лишь позднее нашел Лагранж.

Ферма утверждал, что всякое простое число вида  $4k + 1$  может быть представлено в виде суммы двух квадратов, причем единственным образом (простые числа вида  $4k + 3$ , как легко показать, не представляются в виде суммы квадратов). Эйлер устанавливает, что верно и обратное:

\*) См. «Квант», 1972, № 10, с. 2.

\*) О цепных дробях см. «Квант», 1983, № 5, 6.

если представление  $n$  в виде суммы квадратов существует и единственно, то  $n$  — простое число. Он показывает, что этим свойством иногда можно пользоваться для доказательства простоты  $n$ : например, число 1 000 009 — составное, поскольку наряду с представлением  $1000^2 + 3^2$  имеется представление  $235^2 + 972^2$ .

Эйлер занимается простотой чисел, допускающих единственное представление в виде  $x^2 + 2y^2$ ,  $x^2 + 3y^2$  и, вообще,  $x^2 + Dy^2$  ( $D$  — фиксированное целое число). Он доказывает их простоту для  $D < 10$ , но при  $D = 11$  обнаруживает составное число, допускающее единственное такое представление. Ситуация заинтриговала Эйлера. Он назвал число  $D$  удобным, если в виде  $x^2 + Dy^2$  единственным образом представляются лишь простые числа. Эйлер получил критерий, позволяющий проверять удобство чисел, и с любопытством выписывает удобные числа одно за другим; после 10 идут 12, 13, 15, 16, 18, 21, 22, 24 ... Постепенно удобные числа встречаются все реже. В первой тысяче их набралось 62, но Эйлер упорно продолжает вычисления, вероятно надеясь подметить закономерность. Он обнаружил еще только три удобных числа: 1320, 1365, 1848, хотя, не теряя терпения, он перебрал все числа до 10 000 и несколько дальше. Эйлер имел все основания высказать гипотезу, что совокупность удобных чисел ограничивается найденными им 65 числами. Гаусс сделал рассуждения Эйлера более корректными, но новых удобных чисел не нашел. Сейчас доказана конечность множества удобных чисел, но не известно, существуют ли удобные числа, большие 1848.

Этот поиск очень характерен для творческого метода Эйлера, проделавшего огромную экспериментальную вычислительную работу как для проверки гипотез, так и с целью увидеть новые закономерности. Из великих математиков, пожалуй, лишь Гаусс также владел этим индуктивным методом.

На этом мы кончим обзор той стороны арифметической деятельности Эйлера, в которой он был последова-



Гипсовый бюст Л. Эйлера работы Д. Рахетта (1781 г.)

телем Ферма. Он без пробелов увидел контуры новой арифметики, ее проблематику, тщательно проработал ее технические средства, хотя и не все смог доказать, оставив это на долю своих великих последователей Лагранжа, Лежандра, Гаусса.

### Аналитическая теория чисел

Теория чисел обязана Эйлеру идеей, которая вскоре совершенно изменила ее лицо. Речь идет о применении в арифметике математического анализа. Трудно было представить такую возможность. Поначалу она удивила самого Эйлера: «И хотя мы здесь рассматриваем природу целых чисел, к которой Исчисление Бесконечно Малых кажется неприложимым, тем не менее, я пришел к своему заключению с помощью дифференцирований и других уловок».

Эйлер для разных  $s$  рассматривает сумму бесконечного ряда

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots + \frac{1}{n^s} + \dots (*)$$

(позднее  $\zeta(s)$  назовут *дзета-функцией Римана* — она играет в арифметике исключительную роль). Путем нестрогого рассуждения Эйлер доказывает, что эта бесконечная сумма совпадает с бесконечным произ-

ведением по простым числам

$$\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)^{-1} \left(1 - \frac{1}{3^s}\right)^{-1} \dots \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \dots \quad (**)$$

Эйлер чувствует, что эти рассуждения ведут к исключительно серьезным арифметическим результатам, но сам может предъявить на этом пути лишь новое доказательство восходящей еще к Евклиду теоремы о бесконечности множества простых чисел! Может показаться, что гора родила мышь, но чутье не обмануло Эйлера. Это стало ясно, когда в конце прошлого века Дирихле, отправляясь именно от намеченного Эйлером доказательства, доказал бесконечность числа простых чисел в арифметической прогрессии  $a + dn$  с взаимно простыми  $a$  и  $d$  (обобщение теоремы Евклида).

Эйлер приоткрывает еще одну тайну в мире простых чисел. Его аналитическое чутье, сильно опережавшее его технические возможности, подсказывает, что сумма по простым

числам  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{p}$  при

больших  $p$  близка к  $\ln\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p}\right)$ , а это первый шаг в получении закона распределения простых чисел в натуральном ряду.

Эйлер чувствует, что функцию  $\zeta(s)$  можно продолжить даже на те значения  $s$ , для которых ее нельзя определять как сумму ряда. Более того, он замечает связь между значениями  $\zeta$  в точках  $s$  и  $1-s$  (то, что позднее было сформулировано Риманом в виде знаменитого функционального уравнения). Эйлер исследует значения  $\zeta(s)$  в целых точках. Мы расскажем ниже, как он разобрался со случаем четных аргументов, а симметрию между значениями  $\zeta$  в точках  $s$  и  $1-s$  он рассчитывал применить к исследованию  $\zeta$  в нечетных точках, но потерпел неудачу, поняв, что в отрицательных четных точках продолженная  $\zeta$  равна нулю. Отметим, что об арифметической природе даже числа  $\zeta(3)$  стало кое-что известно лишь в самые последние годы.

Бесконечные суммы и бесконечные произведения были любимым объектом Эйлера в анализе. Эйлер смотрит на бесконечные ряды, как на многочлены бесконечной степени, и по аналогии формулирует для них правило разложения в бесконечное произведение линейных множителей. Если сумма ряда  $1 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  равна нулю в точках  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  то она совпадает с бесконечным произведением  $\left(1 - \frac{x}{a_1}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{a_n}\right) \dots$  Эйлер не дает этому утверждению ни обоснования, ни строгой формулировки, а прямо переходит к примерам. Он исходит из бесконечного ряда

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots;$$

его сумма имеет нули при  $a_{\pm k} = \pm \pi k$  ( $k=1, 2, \dots$ ), откуда делается вывод

$$1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$$

Формально выполняя умножения скобок, собирая коэффициенты при  $x^2$  и сравнивая с коэффициентом в ряду слева, получаем

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Это значение  $\zeta(2)$  при  $s=2$ . Полученный ряд исследовал еще Я. Бернулди, но не смог найти его сумму. Эйлер давно присматривался к этому ряду. Он уже знал его сумму с семью знаками после запятой: 1.6449340, а потом вычислил еще 8 знаков. Понимая, что приведенные им выкладки строго не оправданы, Эйлер прежде всего нашел  $\pi^2/6$  с 7 знаками и сравнил с известным ему ответом. Получилось совпадение! Это произошло в 1735 г. Сравнивая коэффициенты при дальнейших степенях в ряду и произведении, Эйлер без труда находит  $\zeta(4) = \pi^4/90$ ,  $\zeta(6) = \pi^6/42 \cdot 6!$ . Он понимает, что  $\zeta(2n) = C_{2n} \pi^{2n}$  для некоторых чисел  $C_{2n}$ , интересуется их природой и находит для их вычисления рекуррентные формулы.

Эйлера постоянно волновало, что его вычисления чисел  $\zeta(2n)$  не обоснованы. Он придумывает еще одно рассуждение, усиливающее выводы из его числовых экспериментов. Среди рассмотренных им примеров был пример, основанный на разложении  $1 - \sin x$  в ряд и бесконечное произведение. Он приводил к

соотношению  $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ , ко-

торое уже было строго выведено Лейбницем непосредственно из геометрического определения  $\pi$ . Эйлер оценивает это совпадение как очень сильное: «Для нашего метода, который может некоторым показаться недостаточно надежным здесь обнаруживается великое подтверждение. Поэтому мы вообще не должны сомневаться в других результатах, выведенных тем же методом».

Эйлер борется за право публикации и доверия к недоказанным утверждениям, прошедшим серьезную экспериментальную проверку и получившим косвенные подтвержде-

ния. Он понимает, что в современной ему ситуации математика потеряет многое, если жестко придерживаться евклидовых правил установления истины.

### Аддитивная теория чисел

Задачи о числе представлений натуральных чисел в виде сумм слагаемых некоторой природы (как говорил Эйлер, задачи о «разбиении чисел») долго были в центре его внимания. Возможно, первоначальный толчок дали задачи, содержащиеся в письме Ноде, фамилия которого ничего не говорит нашему современнику. К этим задачам Эйлер применил аппарат бесконечных произведений. Вот несколько примеров. Эйлер показывает, что

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots}$$

Рассуждение состоит в том, что если умножить левую часть последовательности на  $1-x$ ,  $1-x^2$ ,  $1-x^3$ , ..., то постепенно будут исчезать все ненулевые степени, а это и означает тождество (это рассуждение можно сделать строгим при помощи теории пределов). После раскрытия скобок в левой части получается ряд  $1+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\dots$ , где  $a_k$  — число представлений  $k$  в виде суммы различных натуральных слагаемых. Правая часть при помощи суммы бесконечной геометрической прогрессии записывается в виде

$$(1+x+x^2+x^3+\dots)(1+x^2+x^4+x^6+\dots) \times \\ \times (1+x^3+x^6+x^9+\dots) \cdot \dots$$

откуда вновь получается ряд  $1+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+\dots$ , где  $b_k$  — число представлений  $k$  в виде суммы нечетных слагаемых, среди которых могут быть одинаковые (почему?). Эйлер делает вывод о совпадении числа представлений  $a_k=b_k$ . Попробуйте доказать это совпадение непосредственно и вы убедитесь, что не видно, как подойти к этой задаче.

Следующее рассуждение исходит из тождества

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)\dots = 1+x+x^2+x^3+\dots$$

(чтобы убедиться в его правдоподобии,

можно умножить обе части на  $1-x$  и проследить, как последовательно исчезают ненулевые степени  $x$  в обеих частях). Из него сразу следует, что каждое число одним и только одним способом представляется в виде суммы различных степеней двойки (числа таких представлений — коэффициенты в степенном ряду, полученном после преобразования левого произведения).

Задачи о разбиениях отходили от арифметики Диофанта и Ферма не только по методам, но и по постановкам. Они ознаменовали начало новой области арифметики — *аддитивной теории чисел*, которая развивается и в наши дни.

### Коротко о других работах

В математике Эйлер был прежде всего аналитиком. Значительная часть его жизни была подчинена созданию систематического (семитомного) курса математического анализа. Эйлер первым работал с общим понятием функции, задаваемой произвольной кривой (графиком), причем он связывал общее понятие функции с задачей о колебании струны. Много сделал Эйлер в рассмотрении специальных классов функций, важных для приложений. Здесь знаменитая  $\Gamma$ -функция, принимающая в точке  $n$  натурального ряда значение  $n!$ , ее двойник  $B$ -функция (эйлеровы интегралы), цилиндрические и эллиптические функции. Эйлер систематически вел аналитические рассуждения в комплексной области, обнаружив замечательную связь между комплексной показательной функцией и тригонометрическими функциями. Его занятия геометрией были более эпизодическими. В основном они относятся к задачам, связанным с картографией, или к применениям анализа в геометрии (началами дифференциальной геометрии). Но можно также вспомнить и о знаменитой формуле Эйлера для многогранников:  $V+\Gamma=P+2$ , где  $V$  — число вершин,  $\Gamma$  — число граней,  $P$  — число ребер, а также о задаче о семи кенигсбергских мостах, в которой Эйлер правильно почувствовал проблески новой геометрии (топологии).



В механике Эйлер первым перешел от геометрического языка Ньютона на аналитический язык, позволявший пользоваться чисто математическими приемами из области дифференциальных уравнений. Вслед за Мопертюи Эйлер предложил первую корректную формулировку принципа наименьшего действия, позволявшего выводить законы механики центральных сил из предположения о том, что некоторая величина при движении должна быть минимальной (см. «Квант», 1975, № 12, с. 34). Он же перешел от механики материальной точки к механике твердого тела конечных размеров.

Занятия Эйлера астрономией — продолжение его занятий механикой. Его область интересов — небесная механика. Он смог реализовать здесь свои поразительные вычислительные способности (как писал французский астроном Араго, он «вычислял так, как человек дышит»). Его теория Луны позволила Майеру составить лунные таблицы невиданной точности. Много занимался Эйлер вычислением эллиптических орбит комет, в частности, знаменитой кометы Лексея (1769 г.).

\*\*\*

В нашем обзоре мы не имели возможности коснуться многих сторон деятельности Эйлера, например оптики, картографии, баллистики и теории корабля. Мы оставили в стороне и его педагогическое наследие, в частности, его знаменитые «Письма к

12/25 *Coroll. 2. Si fl. in unius puncti ad punctum apte  
caso fuerit, fuerit brevis curua, et puncta optima  
sunt perpendiculariter*

Prop IV Theorima

*Si flis BAC in unius puncti  
punctis optima nominatis  
aplicata fuerit, tunc  
quies in M respiciat in  
radius optis MQ*



Demonstratio

*Si ducatur flis BAC in unius puncti  
punctis optima nominatis  
aplicata fuerit, tunc  
quies in M respiciat in  
radius optis MQ*

*Concl. Si flis optis in toto  
curua optima applicata  
fuerit, tunc quies in M  
respiciat in radius optis MQ*

Четвертая страница рукописи Л. Эйлера «О фигурах, которые должны принимать гибкие тела под действием произвольных сил» с пометами Иоганна Бернулли.

принцессе» — своеобразную популярную энциклопедию всей современной Эйлера науки. По работам Эйлера учились великие математики XIX века. «Читайте Эйлера — это наш общий учитель», — говорил Лаплас. По словам Гаусса, «изучение работ Эйлера остается наилучшей школой в различных областях математики, и ничто другое не может это заменить». Эйлера ценили прежде всего те, кто изучал его труды, а не оценивал наследие по «вершинам», кто учился у него и пользовался его провидческими идеями.

Уголок коллекционера

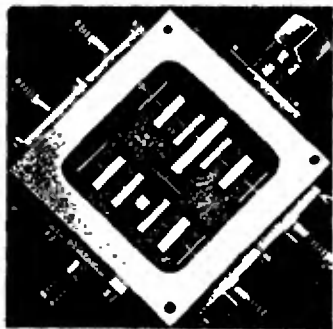


Почтовых марок, посвященных Леопарду Эйлеру, немного. На приведенном здесь рисунке воспроизведены все марки, выпущенные до

1983 года. Первая из них отпечатана в ГДР в 1950 году к 200-летию Берлинской Академии наук. Остальные выпущены в 1957 году в СССР,

ГДР и Швейцарии к 250-летию со дня рождения Эйлера.

В. Р.



## ЭВМ на сверхпроводниках

Доктор  
физико-математических  
наук  
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Термин «поколение» прочно вошел в вычислительную технику. Каждое следующее поколение ЭВМ должно иметь большее быстродействие (число операций в единицу времени), больший объем памяти, меньшие размеры. Есть ли предел на этом пути, и какими станут ЭВМ в будущем? Многие ведущие специалисты в мире сейчас считают, что ЭВМ должны стать сверхпроводящими.

Что такое сверхпроводимость, теперь знает каждый школьник: при очень низких температурах некоторые металлы и сплавы теряют свое сопротивление, и электрический ток течет по таким проводникам без потерь. Идея использования сверхпроводимости для записи информации в ЭВМ имеет давнюю историю. Еще на заре эры вычислительной техники, в 50-х годах были разработаны сверхпроводящие элементы памяти — криотроны. Принцип их действия основан на том,

что магнитное поле разрушает сверхпроводимость. Замкнутое кольцо из сверхпроводника может находиться в двух устойчивых состояниях: когда по нему циркулирует незатухающий сверхпроводящий ток, и когда при включении магнитного поля сверхпроводимость разрушается, а кольцо переходит в нормальное состояние. Так можно «записывать» «0» и «1», то есть создать простейший элемент памяти ЭВМ.

Основное преимущество сверхпроводящих криотронов по сравнению с полупроводниковыми элементами памяти заключается в том, что в сверхпроводящем состоянии не происходит выделения тепла. Ведь при работе ЭВМ греется, и чем больше объем памяти, тем больше тепла выделяется. Если вспомнить, какое огромное количество элементов содержат современные ЭВМ, то становится понятным, почему эта проблема имеет первостепенное значение.

Похоже, что альтернативы нет — сверхЭВМ должны быть сверхпроводящими. Однако оказалось, что время переключения криотронов не может быть меньше, чем  $10^{-8}$  с, а для современных ЭВМ даже миллиардные доли секунды не такая уж малая величина. В то же время сделать ЭВМ на сверхпроводящих криотронах оказалось гораздо труднее, чем на полупроводниках. И охлаждать ее надо было бы до очень низких температур — до температур жидкого гелия (только в таких условиях металлы становятся сверхпроводящими). Поэтому сверхпроводящие криотроны на какое-то время были оставлены, и казалось, что это — тупиковая ветвь в эволюции ЭВМ.

Но вот в 1962 году английский физик Джозефсон открыл замечательный эффект, названный его именем (об этом эффекте можно прочитать, например, в статье «Что такое СКВИД?» в «Кванте» № 10 за 1981 год). И как часто бывает, новый физический эффект открыл новые технические возможности. Хотя принцип действия элемента памяти остался в сущности прежним, были разработаны так называемые джозефсоновские криотроны с временем переключения  $10^{-10}$ — $10^{-11}$  с. При этом энергия, выделяемая при каждом переключении, составляет всего  $10^{-17}$  джоуля (предельно возможная величина еще на два порядка меньше).

С такими рекордными элементами памяти конкурировать уже не могут. Преимущества джозефсоновских криотронов окупают затраты на охлаждение, трудности конструирования и многие другие недостатки сверхпроводящих ЭВМ. Сейчас во всем мире ведутся интенсивные работы по созданию таких ЭВМ. И хотя на этом пути еще очень много нерешенных проблем, ученые считают, что тот день, когда заработает первая ЭВМ на сверхпроводниках, не за горами.



## Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Формулы кинематики для вращательного движения» предназначена восьмиклассникам, «Температура. Теплота. Теплоемкость» — девятиклассникам и «Электрические колебания. Колебательный контур» — десятиклассникам.  
Материалы подготовил И. К. Белкин.

### Формулы кинематики для вращательного движения

Для описания движения материальной точки или поступательного движения твердого тела пользуются следующими кинематическими величинами: перемещением  $\vec{s}$ , скоростью  $\vec{v}$  и ускорением  $\vec{a}$ . Сами они и их проекции на оси координат связаны между собой кинематическими формулами. Например, для прямолинейного равномерного движения перемещение от времени зависит так:

$$\vec{s} = \vec{v}t, \text{ или } s_x = v_x t,$$

где  $t$  — время, отсчитываемое от некоторого начального момента. При прямолинейном равноускоренном движении с начальной скоростью  $\vec{v}_0$  формулы кинематики имеют вид:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

$$\vec{s} = \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2},$$

или

$$v_x = v_{0x} + a_x t,$$

$$s_x = v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2},$$

$$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2a_x s_x.$$

Но при вращательном движении тела величинами  $\vec{s}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$  пользоваться неудобно, так как различные точки тела за один и тот же промежуток времени совершают разные перемещения и движутся с различными скоростями и ускорениями. Поэтому для описания вращательного движения вводятся специальные, так называемые *угловые величины*: угол поворота  $\varphi$ , угловая скорость  $\omega$  (о них говорится в учебнике «Физика 8») и угловое ускорение  $\alpha = (\omega - \omega_0) / \Delta t = \Delta\omega / \Delta t$  (о нем в учебнике не говорится). Для различных точек вращающегося тела они одинаковы.

Угловые величины связаны с величинами  $\vec{s}$ ,  $\vec{v}$  и  $\vec{a}$ , которые, в отличие от угловых, называют *линейными*, простыми соотношениями:

$$s = r\varphi,$$

$$v = r\omega,$$

$$a = r\alpha.$$

Здесь  $s$  — модуль перемещения данной точки тела (при малых перемещениях  $s$  — это длина дуги),  $r$  — радиус окружности, по которой она движется,  $v$  — модуль скорости точки,  $a$  — модуль касательной проекции ускорения\*).

Из-за такой простой связи угловых и линейных величин кинематические формулы для вращательного движения во всем подобны кинематическим формулам, приведенным выше.

При равномерном вращении тела (угловая скорость постоянна) зависимость угла поворота  $\varphi$  от времени имеет вид:

$$\varphi = \omega t.$$

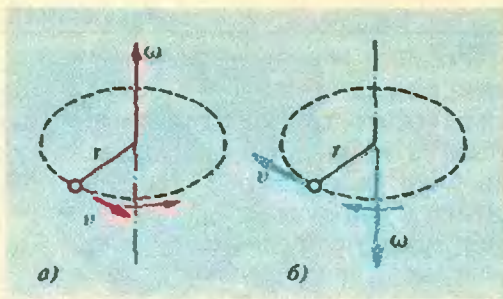
При равноускоренном вращении угловая скорость  $\omega$  изменяется со временем по формуле

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость. Зависимость угла поворота от времени выражается формулой

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{\alpha t^2}{2}.$$

\*) При движении точки по окружности вектор ускорения может иметь две проекции: на направление к центру окружности (центростремительное ускорение) и на направление касательной к окружности (касательная проекция, представляющая собой быстроту изменения модуля скорости точки).



Точно так же между углом поворота и угловой скоростью существует связь:

$$\omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\varphi.$$

Вообще любая формула кинематики вращательного движения тела получается из соответствующей формулы кинематики точки (или поступательного движения тела) простой заменой линейной величины соответствующей угловой.

В заключение отметим (в учебнике «Физика 8» об этом не говорится), что величины  $\varphi$ ,  $\omega$  и  $\alpha$  тоже считаются векторными. (Нужно же отличать повороты или вращения *по* часовой стрелке от поворотов или вращений *против* часовой стрелки!) Принимается, что векторы угловых величин направлены вдоль оси вращения тела по правилу правого винта: если мысленно вращать правый винт так, как вращается тело, то направление поступательного движения винта укажет направление соответствующего вектора (см. рисунок). Правда, для углового ускорения это правило несколько усложняется: вектор ускорения совпадает по направлению с направлением движения винта, если угловая скорость возрастает по модулю, и направлен в противоположную сторону, если угловая скорость уменьшается.

## Температура. Теплота. Теплоемкость

(Из истории физики)

Теплоемкость — это величина, характеризующая одно из тепловых свойств тел. Она показывает, какое количество теплоты нужно подвести к телу или отвести от него, чтобы изменить его температуру (соответственно, повысить или понизить ее) на 1 кельвин. Отнесенную к единице массы, ее называют удельной теплоемкостью. Все это хорошо знакомо школьникам.

Но причем тут слово «емкость»? Ведь им обычно пользуются, когда говорят об объеме какого-нибудь сосуда, точнее, — о его вместимости.

Термин «теплоемкость» появился в физике около 200 лет назад, во второй половине XVIII века, и он остался в физике как память о тех кажущихся теперь странными представлениях о тепле, холоде, температуре, которые существовали тогда в науке.

Начиная с XVII века, в физике шла борьба двух представлений о природе теплоты. Борьба эта закончилась сравнительно недавно — в середине прошлого столетия; в результате одна из теорий теплоты была отброшена полностью, а вторая возторжествовала лишь частично.

Первая теория (точнее было бы сказать — гипотеза) состояла в том, что теплота — это особое вещество, способное проникать в любое тело. Чем больше этого вещества в теле, тем выше его температура. Опытным фактом, на котором основывалось это представление, служило то, что при контакте двух по-разному нагретых тел более теплое из них охлаждается, а более холодное нагревается. Дело в самом деле выглядит так, как будто бы нечто переливается из более теплого тела в более холодное. Это нечто, своего рода тепловое вещество, называли по-разному, но чаще всего — теплородом. Считалось, что всякое тело представляет



собой смесь вещества самого тела с теплородом, а температура, измеряемая термометром, характеризует концентрацию теплорода в теле. Слово «температура» по-латыни как раз и означает смесь. Бронза, например, называлась температурой (смесью) меди и олова.

Вторая теория (гипотеза), впервые предложенная в начале XVII века английским ученым Фрэнсисом Бэконом, утверждала, что теплота — это движение малых частиц внутри тела (молекул, атомов, или, как тогда говорили, нечувствительных частиц). Эта гипотеза тоже основывалась на опытных наблюдениях, показывающих, например, что движением можно вызвать нагревание. У этой теории было много сторонников, и даже очень знаменитых, таких, как Декарт, Бойль, Гук, Ломоносов.

Обе теории при всем их различии имели и кое-что общее. И та, и другая сходились на том, что теплота — это нечто, содержащееся в теле. По первой гипотезе в теле содержится теплород, по второй — частицы с их «живой силой» (так тогда называли кинетическую энергию). Сходились они и в том, что теплота не пропадает и не появляется: если при контакте двух тел одно из них теряет теплоту, то другое получает ее, так что потерянное одним телом приобретает другим. Тем не менее, подавляющее большинство исследователей вплоть до XIX века придерживались первой, так сказать, вещественной теории теплоты, и XVIII век был, безусловно, веком торжества именно этого представления о теплоте.

Введение понятия теплоемкости тесно связано с решением проблемы распределения тепла при соприкосновении различно нагретых тел.

Исходя из первой гипотезы и из того, что термометр показывает концентрацию теплорода в теле, английский математик Тейлор показал, что если смешать, например, массу  $m_1$  воды при температуре  $t_1$ , массу  $m_2$  при температуре  $t_2$ ,  $m_3$  при температуре  $t_3$  и т. д., то температура смеси окажется равной

$$t = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2 + m_3 t_3 + \dots + m_n t_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}. \quad (1)$$

Немецкий физик Фаренгейт по предложению нидерландского врача и химика Бургаве провел опыты с двумя равными массами воды и ртути и показал, что температура смеси (ртуть и вода не смешиваются, но встряхиванием их все же можно привести к одной температуре), не равна температуре  $t$ , подсчитанной по формуле (1), то есть, что формула (1) для смеси *разных* жидкостей не верна. Оказалось, что если температура воды выше температуры ртути, то температура смеси выше подсчитанной, если же температура ртути выше температуры воды, то температура смеси ниже подсчитанной. Это выглядело странным, потому что если термометр действительно показывает концентрацию теплорода в теле, то при равных массах любое тело получает одно и то же количество теплоты (теплорода) при нагревании на одно и то же число градусов.

Ясность в этот вопрос внес в середине XVIII века английский химик Блэк. Опыт Фаренгейта—Бургаве, объясняет Блэк, показывает, что для нагревания некоторой массы ртути требуется меньше теплоты, чем для нагревания такой же массы воды на то же число градусов. Словами самого Блэка: «Ртуть поэтому имеет меньшую емкость для теплоты (если мне позволено применять это выражение), чем вода, меньшее количество теплоты необходимо для повышения температуры ртути на то же количество градусов».

Так впервые появилось понятие «емкость для теплоты» (теплоемкость). Так было ясно показано, что теплота и температура не одно и то же. Но верным осталось то, что было известно и раньше: количество теплоты, полученное одним телом, равно количеству теплоты, потерянное другим. В математической форме идея Блэка выражается равенством, теперь известным каждому школьнику:

$$c_1 m_1 (t - t_1) = c_2 m_2 (t_2 - t). \quad (2)$$

Его называют уравнением теплового баланса, которое и выражает идею о сохранении теплоты.

Из уравнения (2) нельзя найти удельные теплоемкости  $c_1$  и  $c_2$  по от-

дельности, а можно определить только их отношение:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{m_2(t_2 - t)}{m_1(t - t_1)}.$$

В частности, из опытов получалось, что теплоемкость воды в 20 раз больше теплоемкости ртути (по современным данным — более чем в 30 раз). Вообще удельная теплоемкость воды — наибольшая среди жидких и твердых веществ.

Несколько позже было предложено принять удельную теплоемкость воды за единицу (на этой основе была введена и единица количества теплоты — калория, теперь вышедшая из употребления), и тогда стало возможным измерять теплоемкости любых веществ.

Примерно в то же время Блэк сделал еще одно важное открытие, особенно ясно показавшее, что существует разница между количеством теплоты и температурой. Дело в том, что если термометр измеряет концентрацию теплоты (теплорода), то подвод тепла к телу обязательно должен вызывать повышение температуры тела, а отвод теплоты — ее понижение. Между тем, Блэк обнаружил, что при плавлении твердого тела (льда) температура остается неизменной, несмотря на подвод к нему теплоты. Не изменяется температура и воды, когда она отвердевает, хотя от воды при этом отводится теплота. Блэк назвал эту теплоту, которую «не замечает» термометр, скрытой теплотой плавления или отвердевания (теперь ее называют просто теплотой плавления). Им же было установлено существование и скрытой теплоты парообразования.

Открытия Блэка были, несомненно, самыми важными в XVIII веке в области физики тепловых явлений. Интересно и необычна их судьба. Избегая популярности, Блэк не публиковал статей о своих работах, а сообщал о них только в лекциях и докладах. Лишь после его смерти, в 1803 году, были опубликованы его «Лекции об элементах химии», в которых содержалось физическое вступление, озаглавленное «Общие тепловые эффекты». В нем и излага-

лись результаты его замечательных исследований.

Чем же закончился спор о природе теплоты? Какая из двух гипотез победила? Работы, связанные с теплоемкостью, да и другие тепловые исследования XVIII века спора решить не могли. Понадобились эксперименты, которые показали, что температура тела может повышаться и без подвода теплоты, за счет механической работы. Понадобилось получить и более подробные сведения об атомах и молекулах («нечувствительных частицах»), которых «подозревали» в причастности к теплоте. Все это было сделано в XIX веке. В результате выяснилось, что теория теплорода не имеет никакого отношения к действительности и что теплота действительно связана с движением частиц внутри тел, но не так, как это себе представляли раньше. То, что «содержится» внутри тел, — это не теплота, а внутренняя энергия (то есть кинетическая энергия поступательного беспорядочного движения частиц, которая и определяет температуру тела, кинетическая энергия вращательного и колебательного движения частиц, а также потенциальная энергия их взаимодействия). Теплота же — это энергия беспорядочного движения частиц тела, *передаваемая* (например, при контакте) другому телу или телам. Уравнение (2), в частности, не выражает, как думали прежде, закон сохранения количества теплоты (такого закона нет!). Это просто частный случай закона сохранения энергии для тепловых процессов (то есть первого закона термодинамики)  $Q = \Delta U + A$ . Оно справедливо, когда сама система или внешние силы над системой не совершают механической работы ( $A = 0$ ), а изменение внутренней энергии системы  $\Delta U$  непосредственно связано с процессом теплопередачи.

## Электрические колебания.

### Колебательный контур

В 1853 году знаменитый английский физик Уильям Томсон, впоследствии лорд Кельвин, опубликовал статью под названием «О неустановившихся электрических токах». В ней он показал, что в контуре, составленном из конденсатора емкостью  $C$  и катушки с индуктивностью  $L$  (рис. 1), должны происходить электромагнитные колебания с периодом  $T = 2\pi\sqrt{LC}$ .

При слове «колебания» нам сразу представляется образ колеблющегося математического маятника (рис. 2) или груза, прикрепленного к пружине (рис. 3). Но колебания означают не только механическое движение какого-нибудь тела «туда — сюда». Под колебаниями нужно понимать всякое периодическое изменение какой-либо величины, то есть такое изменение, при котором значение этой величины через определенный промежуток времени, называемый периодом колебаний, повторяется.

При механических колебаниях материальной точки периодически изменяющаяся величина — это координата  $x$  точки. В нашем контуре — это заряд  $q$ , который был сообщен обкладкам конденсатора. В течение периода колебаний заряд на обкладке постепенно исчезает, изменяет свой знак и снова восстанавливается. Совершает колебания и напряжение  $U = q/C$  между обкладками конденсатора, и сила тока  $I$  в цепи, так как в любой момент времени справедливо соотношение

$$U = L \frac{dI}{dt}. \quad (1)$$

Колеблются также напряженность  $E$  электрического поля в конденсаторе (потому что  $E = U/d$ , где  $d$  — расстояние между обкладками) и индукция  $B$  магнитного поля катушки (потому что она пропорциональна току).

Это аналогично тому, как при механических колебаниях периодически изменяется не только координата точки, но и ее скорость, ускорение, кинетическая энергия и т. д. Все эти величины совершают колебания.

В школьном учебнике «Физика 10» рассказывается об аналогии между механическими и электрическими колебаниями. Эту аналогию можно сделать более строгой, если заметить, что уравнение (1) по форме совпадает с уравнением, выражающим второй закон Ньютона для тела, колеблющегося под действием пружины:

$$F = m \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (2)$$

где  $F$  — сила упругости, действующая на тело,  $m$  — масса,  $\Delta v/\Delta t = a$  — ускорение тела. Поэтому уравнение (1) можно исследовать по принципу «одинаковые уравнения имеют одинаковые решения».

Сравнение уравнений (1) и (2) показывает, что напряжение  $U$  соответствует силе упругости  $F$ , ток  $I$  в катушке — скорости  $v$  движения тела, а индуктивность катушки  $L$  — массе тела  $m$ . Наконец, из соотношений

$$U = \frac{q}{C} \text{ и } F = kx$$

следует, что величина, обратная емкости конденсатора ( $1/C$ ), соответствует жесткости пружины  $k$ . Сводная таблица, подытоживающая эту аналогию, приведена в «Физике 10».

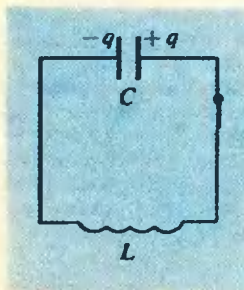


Рис. 1.

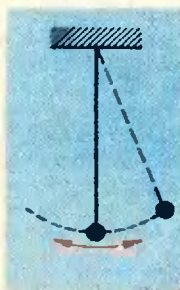


Рис. 2.

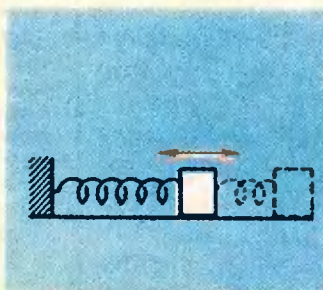


Рис. 3.

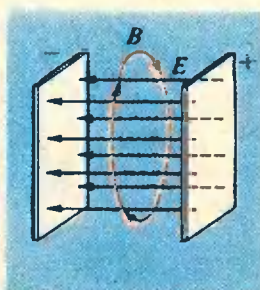


Рис. 4.

В заключение рассмотрим интересный вопрос о токе в колебательном контуре. Несмотря на то, что контур разомкнут (между обкладками конденсатора нет проводников), по такой «разомкнутой цепи» течет ток. Более того, если бы сопротивление катушки и подводящих проводов было равно нулю (сверхпроводимость), электрический ток, вызванный разрядом конденсатора, никогда бы не прекратился.

Как это ни странно, но ток в колебательном контуре можно считать замкнутым. Чтобы это понять, нужно вернуться к явлению электромагнитной индукции. Как впервые указал Максвелл, сущность этого явления заключается не в том, что изменение магнитного потока порождает индукционный ток, а в том, что изменение магнитного поля порождает электрическое поле с замкнутыми силовыми линиями (вихревое поле). Индукционный ток — это движение заряженных частиц в этом поле. В связи с такой формулировкой явления электромагнитной индукции Максвеллу пришла в голову гениальная мысль, что должно существовать и обратное явление: изменяющееся электрическое поле создает магнитное поле.

В нашем колебательном контуре, когда в нем происходят колебания, есть место, где ничего, кроме изменяющегося электрического поля, нет, это конденсатор. Значит, вокруг конденсатора существует магнитное поле (рис. 4). С другой стороны, известно, что магнитное поле окружает всякий электрический ток. Выходит, что своим свойством быть окруженным магнитным полем изменяющееся (переменное) электрическое поле ничем не отличается от электрического тока. Со времен Максвелла скорость изменения переменного электрического поля и называют поэтому током, точнее, *током смещения*.

Таким образом, можно считать, что «обычный» электрический ток (так называемый ток проводимости) в проводящей части цепи колебательного контура как бы продолжается в конденсаторе током без зарядов — током смещения.

## Наш календарь



### Об изохронности колебаний маятника

На склоне лет Галилео Галилей (1564—1642) рассказал своему юному ученику Винченцо Вивини, как начиналась его научная жизнь. Однажды, это было в 1583 году, девятнадцатилетний Галилей, находясь в Пизанском соборе, наблюдал за качаниями большой люстры. Ему показалось, что период ее колебаний с течением времени не изменяется. Несмотря на затухание, то есть уменьшение размахов колебаний, продолжительность каждого колебания оставалась одинаковой. Вернувшись домой, он проделал эксперименты с шарами, подвешенными на нитях, и пришел к выводу, что период колебаний маятника в самом деле не зависит от максимального угла отклонения. Как стали потом говорить, — колебания маятника изохронны, то есть постоянны по времени. (Позднее Галилей обнаружил, что периоды колебаний относятся как корни квадратные из длин маятников.) С этого открытия юного Галилея началась цепь его великих механических открытий.

В соборе, как пишет Вивини, Галилей контролировал период колебаний люстры по биению собственного пульса, проводя эксперименты, он пользовался водяными часами.

Механические часы того времени оставали желать много лучшего. Мы не знаем, когда Галилей решил использовать для создания часов изохронность колебания маятника: на заре ли его научной деятельности, в период создания новой механики, или в конце его жизни, когда он после суда инквизиции вновь вернулся к занятиям механикой. Несомненно, однако, что вплотную конструированием маятниковых часов Галилей занялся, когда был стар и практически слеп, и потому не смог довести свой великий замысел до реально работающего механизма.

Первые маятниковые часы были созданы Христианом Гюйгенсом (1629—1695). Всю свою жизнь Гюйгенс работал над их усовершенствованием и получил в процессе этой деятельности много замечательных результатов. В частности, он уточнил, что утверждение Галилея об изохронности колебаний маятника справедливо лишь для малых углов отклонения маятника от равновесия.

С. Г.



**Задачи**

1. Журнал «Квант» состоит из 16 вложенных друг в друга двойных листов. На каком двойном листе сумма чисел, обозначающих номера страниц, будет наибольшей?

2. Найдите двузначное число, вдвое большее произведения его цифр.

3. Решите пять «географических» ребусов (см. рисунок). В каждом ребусе одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, а разным — разные.

4. Кости домино выложены в виде кружевной салфетки, причем сумма очков в каждом вертикальном и в каждом горизонтальном ряду одна и та же (см. рисунок). Значения очков на костях, кроме «пустышек», зашифрованы буквами. Расшифруйте их.

5. Отец и сын наблюдали солнечное затмение, и темой их разговоров были Солнце и Луна. «Папа, — спросил мальчик, — а во сколько раз Солнце дальше от нас, чем Луна? «Насколько я помню, — отвечал отец, — в 387 раз». «Тогда я могу подсчитать, во сколько раз объем Солнца больше объема Луны». «Пожалуй, ты прав», — ответил, подумав, отец. Во сколько же раз объем Солнца больше объема Луны?

Эти задачи нам предложили М. В. Варга, А. М. Козлов, М. А. Мнацакянц, Э. Сулейманов (ученик 10 класса с. ш. № 10 г. Шеки), А. Холин (ученик 7 класса с. ш. № 1 г. Кокчетав).



	W	W	X	X	X	Z	W
		Z	Z	Z			V
	X	W	V	X	U	V	X
	Z	Y			U	Y	V
Y	V	X			Z		V
Y	U	W	Y	U		X	U
Y		W	W	V	Z		Y
Z	Y	U	U	U	W	V	





## Электронный глаз

Кандидат педагогических наук  
В. С. ДАНИУШЕНКОВ

Наверное, многие из вас в кабинете физики обратили внимание на прибор, похожий на телевизор с маленьким круглым экраном. Когда он работает, по его экрану «бегают» различные светящиеся линии. Этот прибор называют осциллографом. Он служит для записи на экране быстро протекающих и невидимых для человеческого глаза физических процессов. Тем самым прибор расширяет возможности нашего восприятия и при познании явлений природы. За эту особенность осциллограф часто называют «электронным глазом».

### Главное — это трубка

Основной элемент осциллографа — электроннолучевая (или просто «электронная») трубка. Она представляет собой стеклянный баллон специальной формы, из которого выкачан почти весь воздух. Внутри баллона располагаются «электронная пушка» для получения электрон-

ного луча и механизм для управления этим лучом (рисунок 1). О том, как работает трубка, мы расскажем позже. А сначала — немного истории.

Прототипом современной электронной трубки была газоразрядная трубка, с помощью которой англичанин У. Крукс изучал процессы прохождения электрического тока через разреженные газы. Трубка представляла собой стеклянный баллон с впаиваемыми в него электродами; баллон подсоединялся к насосу, откачивающему из него воздух. Крукс обнаружил, что когда электроды были подсоединены к источнику напряжения, внутри трубки появлялись неизвестные лучи.

Спустя 25 лет французский физик Ж. Перрен доказал, что эти лучи представляют собой поток отрицательно заряженных частиц, источником которых является раскаленная поверхность отрицательного электрода — катода. Перрен поместил перед

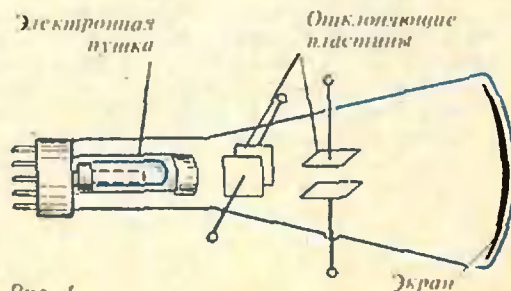
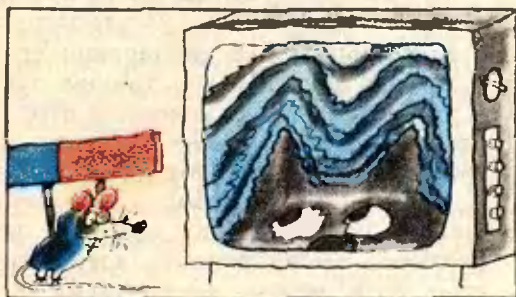


Рис. 1.

катодом полый металлический цилиндр, который соединялся с электроскопом (рисунок 2). Когда на электроды было подано напряжение, лепестки электроскопа зарядились и разошлись. При поднесении к электроскопу положительно заряженной стеклянной палочки лепестки возвращались в исходное положение. Следовательно, на цилиндре при работе трубки скапливался отрицательный заряд. Перрен поднес к трубке магнит так, что он находился против свободного пространства между катодом и полым цилиндром. При этом электроскоп не заряжался. Значит, отрицательно заряженные частицы, которые в отсутствие магнита попадали на цилиндр, вылетали с катода. Магнитное поле отклоняло эти частицы на стенку трубки. В этом опыте впервые было осуществлено магнитное управление потоком заряженных частиц.



*Вы можете увидеть действие магнитного поля на поток электронов, поднеся магнит к телевизору сбоку. Изображение на экране будет смещаться вверх или вниз в зависимости от того, каким полюсом вы подносите магнит.*

В 1897 году немецкий физик К. Браун создал лучевую трубку с магнитным управлением, по форме

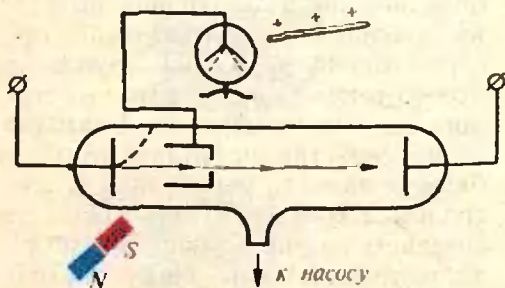
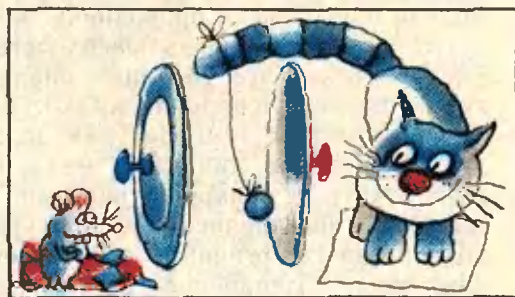


Рис. 2.

похожую на современную электронную трубку.

В том же году английский физик Дж. Дж. Томсон с помощью этой трубки показал, что лучи, вылетающие с катода, представляют собой поток электронов. В своем эксперименте Томсон впервые применил электрический способ управления потоком электронов. Поместив перед катодом две параллельные пластины, подсоединенные к полюсам электрической батареи, он увидел, что лучи, попадающие в электрическое поле между пластинами, отклоняются от своего первоначального пути.



*Увидеть, как действует электрическое поле на заряженные частицы, вы можете, проделав такой опыт. Берете две алюминиевые пластины или крышки от кастрюль с изолированными ручками и укрепляете их параллельно друг другу. Из фольги делаете круглый шарик (или гильзу) и прикрепляете к нему нитку. Затем берете эбонитовую палочку и натираете ее кусочком шелка; при этом палочка электризуется отрицательно. Сначала легким прикосновением палочки заряжаете шарик, а потом одну из пластин. Затем натираете палочку листком бумаги. В этом случае она электризуется положительно. Заряжаете палочкой вторую пластину. Теперь все готово к опыту. Шарик на нитке опустите между пластинами. Вы увидите, что шарик отклоняется в сторону положительно заряженной пластины.*

Аналогичным образом действует электрическое поле на электроны в электроннолучевой трубке. При движении между управляющими пластинами весь поток электронов отклоняется от первоначального пути

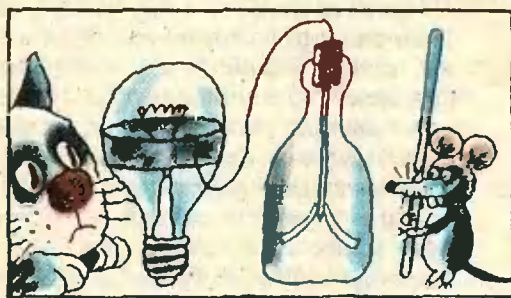


в сторону пластины, подсоединенной к положительному полюсу батареи.

### Пушка, стреляющая электронами

Мы уже сказали, что источником электронов в трубке является отрицательно заряженный электрод — катод. В любом проводнике имеется огромное количество электронов, которые находятся в постоянном движении. Большинство электронов движется с почти одинаковыми по абсолютной величине скоростями. Но есть электроны, скорость которых значительно больше средней скорости. Такие электроны, оказавшись вблизи поверхности проводника, могут «прорваться» сквозь поверхность, «испариться» (эта ситуация аналогична процессу испарения жидкости). При комнатных температурах доля этих электронов ничтожно мала, и обнаружить их испарение невозможно. Но с повышением температуры количество «энергичных» электронов возрастает. Испарение электронов с поверхности нагретого проводника идет очень интенсивно.

Катод электронной трубки (тоненький проводник) разогревают докрасна, пропуская через него электрический ток, и с поверхности катода испаряются электроны.



*Убедиться в том, что с нагретого проводника испаряются электроны, можно с помощью несложного опыта. Для опыта нужна лампа накаливания, листок фольги и электроскоп. Электроскоп вы можете сделать сами. Для этого возьмите бутылку и подберите к ней пробку (лучше всего резиновую; можно сделать пробку из ластика). Через пробку пропустите достаточно длинный гвоздь; к острому*

*концу гвоздя прикрепите лепестки из папиросной бумаги. Закройте бутылку пробкой так, чтобы лепестки были внутри бутылки. Электроскоп готов.*

*Из фольги вырежьте полоску и оберните ее плотно вокруг колбы лампы накаливания. Тонким проводком соедините фольгу с электроскопом.*

*Теперь зарядите электроскоп положительно (например, с помощью стеклянной палочки, потертой о шелк) и включите лампу в сеть. Вы увидите, что лепестки электроскопа опадают.*

*Фольга, соединенная с электроскопом, имеет положительный заряд. Электроны, испаряющиеся из нити накала лампы, притягиваются этим зарядом, оседают на колбе лампы и заряжают ее внутреннюю поверхность отрицательно. Этот отрицательный заряд и нейтрализует положительный заряд фольги и, следовательно, электроскопа.*

Как собрать все «испаряющиеся» с катода электроны в тонкий луч?

Напротив катода помещен второй электрод — анод. Как правило, он имеет форму диска. Между катодом и анодом создают большое напряжение (от нескольких сотен до нескольких тысяч вольт). Электрическое поле между электродами направляет электроны, вылетевшие с поверхности катода, на анод и разгоняет их до очень большой скорости. А чтобы собрать эти электроны в тонкий луч, делают следующее.

На катод одевают металлическую «рубашку» — цилиндрический стакан с маленьким отверстием в дне. Ей сообщают отрицательный заряд. Этот заряд сжимает вылетающие с поверхности металла электроны к оси «рубашки»-стакана, так что большая часть электронов вылетает из «рубашки» через маленькое отверстие. Меняя заряд на «рубашке», можно регулировать число вылетающих из нее электронов. Благодаря этому свойству металлическую «рубашку» назвали управляющим электродом. Узкий пучок электронов, вылетевших из управляющего электрода, направляется на анод и проходит через узкое отверстие в нем.

Все вместе — катод, управляющий электрод и анод — называют электронной пушкой.

Узкий пучок электронов, выстреленных электронной пушкой, попадает на экран, покрытый специальным веществом — люминофором. Под действием бомбардирующих его электронов люминофор начинает светиться, так что в том месте, где на экран падает электронный луч, появляется светящееся пятно.

Но на экране работающего осциллографа обычно видны светящиеся линии, которые, к тому же, могут «бегать» по экрану. Как же получается изображение на экране осциллографа?

### Стрельба с наводкой

Воспользуемся способом Дж. Дж. Томсона для прицельной стрельбы по экрану из «электронной пушки». Для этого на пути полета электронов поставим две взаимно перпендикулярные пары пластин, подсоединенных к источникам напряжения. Пластины, лежащие в горизонтальных плоскостях, отклоняют луч вверх или вниз. Их называют вертикально отклоняющими пластинами. Пластины, лежащие в вертикальных плоскостях, отклоняют луч влево или вправо по горизонтали. Это — горизонтально отклоняющие пластины. Понятно, что, меняя напряжение на пластинах, мы будем «перемещать» на экране светящееся пятно (рисунок 3 схематично поясняет, как это происходит). Значит, по смещению пятна в ту или иную сторону можно судить о величине напряжения, приложенного к соответствующим отклоняющим пластинам. Пластины как бы выполняют роль наводчиков при электронной пушке.

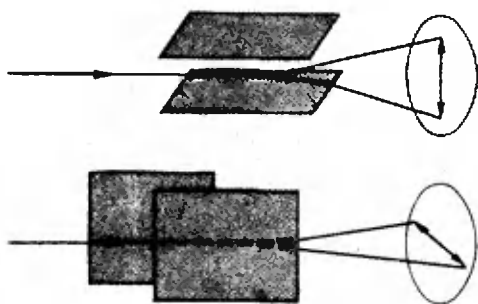


Рис. 3.

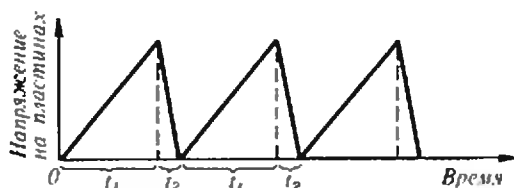


Рис. 4.

Электронный луч очень быстро реагирует на изменение напряжения на пластинах. Поэтому электронная трубка позволяет следить за процессами, в которых происходит быстрое изменение напряжений, токов. Трубка, соединенная со специальными приборами для изучения таких процессов, и образует осциллограф.

Обычно изучаемый сигнал (как правило, электрический) подают на вертикально отклоняющие пластины. А на горизонтально отклоняющих пластинах напряжение периодически меняют. График изменения этого напряжения во времени приведен на рисунке 4. В течение времени  $t_1$ , когда напряжение возрастает, луч, колеблющийся в вертикальном направлении (в «такт» с изучаемым сигналом), «растягивается» по горизонтали, и линия, получающаяся на экране осциллографа, показывает, как меняется со временем напряжение на вертикально отклоняющих пластинах. Затем напряжение быстро, за малое время  $t_2$ , падает до нуля — луч на экране возвращается на «начальную» вертикаль.

\* \* \*

Теперь вы представляете себе, как работает осциллограф. Этот прибор используется в самых разных областях научных исследований, находит широкое применение в практической работе заводских лабораторий.

### Поправка

Редакция обращает внимание читателей на то, что на четвертой странице обложки «Кванта» № 9 а «правом кубике» «Змен» левый столбец напечатан желтым цветом вместо оранжевого. Кроме того, в части тиража красный и оранжевый цвета практически не различимы, однако наблюдательный читатель, пользуясь соображениями симметрии, сможет восстановить цвета.

# Задачник Кванта

## Задачи

М831—М835; Ф843—Ф847

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 января 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М831, М832» или «Ф843». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М831.** Пусть  $P$  и  $Q$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  четырехугольника  $ABCD$ ,  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что если прямые  $MN$  и  $PQ$  перпендикулярны, то  $|BC| = |AD|$ .

**М832.** а) Докажите, что для любого натурального  $n > 6$  квадрат можно разрезать на  $n$  квадратов (среди которых могут быть и квадраты одинакового размера).

б) Докажите, что для любого натурального  $n > 100$  куб можно разрезать на  $n$  кубов.

**М833\*.** Последовательность  $x_n$  задается условиями:

$$x_1 = 2; \quad x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Докажите, что а)  $x_n \neq 0$  (при всех  $n$ );

б) эта последовательность непериодическая.

**М834.** Оросительная установка, расположенная в точке  $O$ , обслуживает круг радиуса 100 м с центром  $O$ . Такими установками нужно полностью орошать квадратное поле  $1 \text{ км} \times 1 \text{ км}$ .

а) Бригадир предложил расположить 64 установки в вершинах квадратной сетки со сторонами, параллельными краям поля (рис. 1). В каких пределах может меняться сторона  $a$  квадратной сетки?

б) Восьмиклассник Витя утверждает, что можно оросить поле с помощью лишь 46 таких установок. Прав ли Витя?

**М835\*.** На однокруговый шахматный турнир приехало  $n$  шахматистов из страны  $A$  и  $n$  шахматистов из страны  $B$ . Оказалось, что как бы ни разбить шахматистов на пары (чтобы друг с другом играли шахматисты разных стран), найдется хотя бы одна пара шахматистов, которые уже встречались ранее друг с другом. Докажите, что можно выбрать  $a$  шахматистов из страны  $A$  и  $b$  шахматистов из страны  $B$  так, что каждый из выбранных  $a$



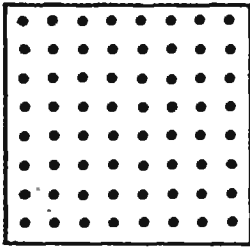


Рис. 1.

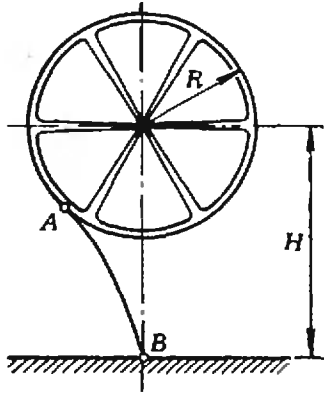


Рис. 2

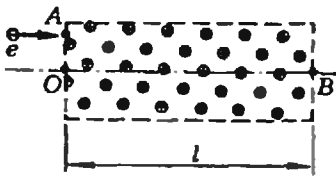


Рис. 3

шахматистов встречался с каждым из выбранных  $b$  шахматистов, а  $a + b > n$ .

*Л. Д. Менихес*

**Ф843.** Колесо радиуса  $R$ , расположенное на высоте  $H$  над землей, вращается с угловой скоростью  $\omega$ . С колеса срывается капля и падает на землю в точке  $B$  под центром колеса (рис. 2.). Найти время падения капли и точку  $A$  колеса, в которой капля отрывается.

*А. Н. Григоренко*

**Ф844.** В сосуд, наполненный смесью жидкостей, плотность которой изменяется с глубиной по закону  $\rho = \rho_0 + \alpha h$ , опускают тело массы  $m$  и объема  $V$ . Тело целиком погружается в жидкость. На какой глубине оно окажется, если имеет форму куба? шара?

*Л. Г. Маркович*

**Ф845.** Внутри камеры автомобильного колеса радиуса  $R$  попал небольшой камешек. При какой минимальной скорости автомобиля камешек будет вращаться вместе с колесом, если коэффициент трения камешка о камеру равен  $\mu$ ?

*А. В. Левин*

**Ф846.** Почему мощные двигатели постоянного тока следует включать через пусковой реостат?

*А. В. Кубышкин*

**Ф847\*.** В объемный пучок положительных ионов, имеющий круглое сечение, в точке  $A$  влетает электрон, скорость которого параллельна оси симметрии пучка (рис. 3). Объемная плотность зарядов в пучке равна  $\rho$ , длина пучка  $l$  (длина пучка много больше его радиуса). При каких значениях скорости электрона он вылетит из пучка в точке  $B$ ? Столкновения электрона с ионами не учитывать.

*О. В. Фатьянова*

## Problems

### M831—M835; P843—P847

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*).

**M831.** Suppose  $P$  and  $Q$  are the midpoints of sides  $AB$  and  $CD$  of the quadrilateral  $ABCD$ ,  $M$  and  $N$  — those of the diagonals  $AC$  and  $BD$ . Prove that if the lines  $MN$  and  $PQ$  are perpendicular, then  $|BC| = |AD|$ .

*V V Prasolov*

**M832.** a) Prove that for any natural  $n > 6$  a square can be cut up into  $n$  smaller squares (among which some may be congruent).

b) Prove that for any natural  $n > 100$  the cube may be cut up into  $n$  smaller cubes.

*V. A. Li*

After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 31st, 1984 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS** (or **MATHEMATICS**).

**M833\***. The sequence  $x_n$  is given by the relations  $x_1 = 2$ ,  

$$x_{n+1} = \frac{2+x_n}{1-2x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$
 Prove that a)  $x_n \neq 0$  for all  $n$ ;  
 b) this sequence is non-periodic.

*V. E. Matizen*

**M834**. A watering mechanism centered at the point  $O$  sprinkles all points within a circle of radius 100m with centre  $O$ . Such mechanisms are used to water the entire surface of a square field  $1 \text{ km} \times 1 \text{ km}$ .  
 a) The farmer working on the field proposes to place 64 mechanisms at the nodes of a square lattice with sides parallel to those of the field (see figure Pnc. 1). Within what limits can the side  $a$  of the lattice vary?  
 b) Victor, an eighth-grade school boy, says the field can be entirely sprinkled with only 46 such mechanisms. Is he right?

*N. B. Vasiliev*

**M835\***.  $n$  chess players from the country  $A$  and  $n$  from  $B$  arrive to participate in a one-round chess match. It turns out that, no matter how the players are paired (each player being paired with a player from the other country), at least one pair will consist of players who have played each other before. Prove that  $a$  players from the country  $A$  and  $b$  players from  $B$  can be chosen so that each of the chosen  $a$  players has played with each of the  $b$  chosen ones and  $a+b > n$ .

*L. D. Menikhos*

**P843**. A wheel of radius  $R$  situated at the altitude  $H$  above the ground rotates with angular velocity  $\omega$ . A drop comes off the wheel and falls to the ground at the point  $B$  under the wheel's centre (see figure Pnc. 2). Find the time the drop takes to fall and the point  $A$  where it came off the wheel.

*A. N. Grigorenko*

**P844**. A body of mass  $m$  and volume  $V$  is lowered into a receptacle filled with a liquid mixture whose density varies with depth according to the rule  $\rho = \rho_0 + ah$ . The body is entirely immersed in the liquid. How deep will it be, if it has the shape of a cube? of a ball?

*L. G. Markovich*

**P845**. A little pebble has penetrated inside the tube of an automobile tire of radius  $R$ . For what minimum velocity of the automobile will the pebble rotate together with the wheel, if the friction coefficient of pebble against tube is  $\mu$ ?

*A. B. Levin*

**P846**. Why must powerful  $DC$  motors be switched on by means of a special reostat?

*A. V. Kubyskin*

**P847\***. An electron flies into a three-dimensional beam of positive ions with round section, the electron's velocity at that moment being parallel to the beam's axis of symmetry (see figure Pnc. 3). The volume density of charge in the beam is  $\rho$ , its length is  $l$  (and is much greater than its section's radius). For what values of the electron's velocity will it fly out of the beam at the point  $B$ ? Collisions of the electron with ions are not to be taken into account.

*O. V. Fatianov*

## Решения задач

М816, М817, М819, М820\*); Ф828—Ф832

**М816.** *Натуральные числа  $a$  и  $b$  получают друг из друга перестановкой цифр. Докажите, что*

- а) *суммы цифр чисел  $2a$  и  $2b$  равны;*
- б) *суммы цифр чисел  $a/2$  и  $b/2$  равны (если  $a$  и  $b$  четные);*
- в) *суммы цифр чисел  $5a$  и  $5b$  равны.*

$$\begin{array}{r} \overset{1}{\curvearrowright} \overset{1}{\curvearrowright} \\ 71983 \\ + 71983 \\ \hline 143966 \end{array}$$

$$S(2x) = 14 + 2 + 18 + 16 + 6$$

$$S(2x) = 1 + 4 + 2 + 1 + 8 + 1 + 6 + 6$$

Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

Пусть  $S(x)$  — сумма цифр натурального числа  $x$ ,  $N(x)$  — количество его цифр, больших 4. Тогда

$$S(2x) = 2S(x) - 9N(x). \quad (*)$$

Представим, что мы складываем число  $x$  само с собой столбиком, начиная с младших разрядов. Перенос единицы в очередной,  $(k+1)$ -й разряд суммы происходит в том и только в том случае, когда в  $k$ -м разряде числа  $x$  стоит одна из цифр 5, 6, 7, 8 или 9 (в примере на полях это происходит во 2-м, 3-м и 5-м от конца разрядах), то есть количество переносов равно  $N(x)$ . При каждом переносе вместо десятки, которая входит в сумму  $S(x) + S(x)$ , возникает единица, которая входит в сумму  $S(2x)$ , то есть  $S(2x)$  по сравнению с  $2S(x)$  уменьшается на 9. Отсюда получаем (\*).

Теперь легко доказать утверждения задачи.

а) Подставляя в (\*) вместо  $x$  поочередно  $a$  и  $b$  и учитывая очевидные равенства  $S(a) = S(b)$  и  $N(a) = N(b)$ , получим, что  $S(2a) = S(2b)$ .

б) Заметим, что цифра  $i$ -го разряда числа  $x$  больше 4 в том и только том случае, когда цифра  $(i+1)$ -го разряда числа  $2x$  нечетна. Поэтому  $N(x)$  равно количеству нечетных цифр в числе  $2x$ . Следовательно, для чисел  $a$  и  $b$ , составленных из одних и тех же цифр,  $N(a/2) = N(b/2)$  и в силу (\*)

$$\begin{aligned} S\left(\frac{a}{2}\right) &= \frac{1}{2} \left( S(a) + 9N\left(\frac{a}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( S(b) + 9N\left(\frac{b}{2}\right) \right) = S\left(\frac{b}{2}\right). \end{aligned}$$

в) Очевидно, числа  $10a$  и  $10b$  удовлетворяют условиям пункта б), поэтому

$$S(5a) = S\left(\frac{10a}{2}\right) = S\left(\frac{10b}{2}\right) = S(5b).$$

А. Д. Лисицкий

**М817.** *Точка  $K$  лежит на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что соотношение*

$$|AK|^2 = |AB| \cdot |AC| -$$

$$|KB| \cdot |KC|$$

*выполнено тогда и только тогда, когда  $|AB| = |AC|$  или*

$$\widehat{BAK} = \widehat{CAK}.$$

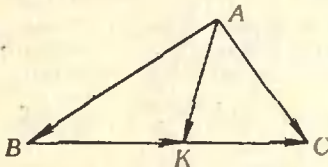


Рис. 1.

$$|AK|^2 = q|AB|^2 + p|AC|^2 - |BK| \cdot |KC|,$$

$$\text{где } p = |BK| : |BC|, \quad q = |CK| : |BC|.$$

Первое решение (рис. 1). Пусть  $p = |BK| : |BC|$ ,  $q = 1 - p = |CK| : |BC|$ , тогда

$$\vec{AK} = \vec{AB} + \vec{BK} = \vec{AB} + p\vec{BC} = \vec{AB} + p(\vec{AC} - \vec{AB}) = q\vec{AB} + p\vec{AC}. \quad (**)$$

$$\text{По условию } |AK|^2 = (q\vec{AB} + p\vec{AC})^2 = |AB| \cdot |AC| - |BK| \cdot |KC| = |AB| \cdot |AC| - pq(\vec{AC} - \vec{AB})^2.$$

Раскрывая скобки и учитывая, что  $p + q = 1$ , получаем:

$$q|AB|^2 + p|AC|^2 - |AB| \cdot |AC| = 0.$$

Следовательно, отношение длин сторон треугольника  $\lambda = |AB| : |AC|$  удовлетворяет квадратному уравнению  $q\lambda^2 - \lambda + p = 0$ , то есть  $\lambda = 1$  или  $\lambda = p/q$ . В первом случае  $|AB| = |AC|$ , во втором —  $|AB| : |AC| = p/q = |BK| : |KC|$ , откуда по известной теореме<sup>\*\*</sup> вытекает, что  $AK$  — биссектриса или  $\widehat{BAK} = \widehat{CAK}$ .

С помощью равенства (\*\*), легко вывести общую формулу для длины отрезка  $AK$ , известную как формула Стюарта. Она приводится на полях.

<sup>\*</sup> Задача М818 будет решена в одном из следующих номеров «Кванта».

<sup>\*\*</sup> См., например, С. Р. Сефибеков «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе» («Квант», 1983, № 8).

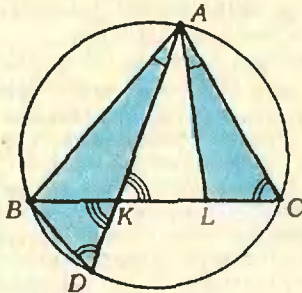


Рис. 2.

**M819.** В Швамбрании  $n$  городов, каждые два из которых соединены дорогой. (Дороги сходятся лишь в городах, все пересечения организованы в разных уровнях.) Злой волшебник намеревается установить на каждой дороге одностороннее движение так, что, выехав из любого города, в него уже нельзя будет вернуться. Докажите, что

а) волшебник может это сделать;

б) при этом найдется город, из которого можно добраться до всех других, и найдется город, из которого нельзя выехать;

в) существует  $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$  способов осуществить намерение злого волшебника.

Второе решение. Возьмем на отрезке  $BC$  такую точку  $L$ , что  $\widehat{CAL} = \widehat{KAB}$  (рис. 2). Покажем, что  $|AL| = |AK|$ . Отсюда будет вытекать, что либо точки  $L$  и  $K$  совпадают, то есть  $AK$  — биссектриса угла  $A$ , либо  $\triangle ALK$  равнобедренный и тогда по теореме о внешнем угле треугольника

$$\widehat{ABC} = \widehat{AKC} - \widehat{BAK} = \widehat{ALB} - \widehat{LAC} = \widehat{ACB},$$

то есть треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

Обозначим через  $D$  точку пересечения прямой  $AK$  и описанной около треугольника  $ABC$  окружности. Поскольку  $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ , треугольник  $ACL$  подобен треугольнику  $ADB$ , следовательно,  $|AL| \cdot |AD| = |AB| \cdot |AC|$ . Треугольники  $ACK$  и  $BDK$  также подобны ( $\widehat{ACB} = \widehat{ADB}$ ,  $\widehat{AKC} = \widehat{BKD}$ ), поэтому  $|BK| \cdot |KC| = |AK| \cdot |KD|$ . Таким образом, равенство, данное в условии, эквивалентно следующему

$$|AK|^2 - |AL| \cdot |AD| = |AK| \cdot |KD|$$

или

$$|AK|(|AK| + |KD|) = |AL| \cdot |AD|.$$

Отсюда и вытекает, что  $|AK| = |AL|$ .

А. Л. Тоим, Н. Б. Васильев



а) Волшебник может занумеровать все города Швамбрании числами от 1 до  $n$  и установить на каждой дороге движение от города с меньшим номером к городу с большим номером. Этим он достигнет своей цели, потому что номера городов, которые встретятся при движении по любому маршруту с таким ограничением будут всегда возрастать.

б) Начав с любого города, поедем по дорогам Швамбрании, соблюдая правила злого волшебника. Будем двигаться, пока это возможно. Никакой город не встретится на нашем пути дважды, и поскольку общее число городов конечно, рано или поздно нам придется остановиться. Но это и значит, что мы попали в город  $Z$ , из которого нельзя выехать.

Теперь обратим направления движения на всех дорогах. Ясно, что двигаясь по новым правилам, мы опять не сможем посетить дважды один и тот же город. Поэтому, как и выше, найдется город  $A$ , из которого нельзя выехать по новым (!) правилам. Следовательно, первоначально на дороге, соединяющей  $A$  с любым другим городом  $B$ , было установлено движение от  $A$  к  $B$ , то есть из  $A$  можно попасть в любой город (пройдя всего одну дорогу).

Заметим, что из любого города кроме  $Z$  можно выехать (например, в  $Z$ ), а в любой город кроме  $A$  можно въехать.

в) Проведем индукцию по числу городов  $n$ . При  $n=1$  утверждение в) очевидно. Докажем его для  $n$  городов, считая, что оно справедливо для  $n-1$  городов. Согласно пункту б), при любых правилах движения, удовлетворяющих условию злого волшебника, найдется один и только один город  $Z$ , из которого нельзя выехать. Им может быть любой из  $n$  городов.

На всех дорогах, соединяющих этот город с другими, устанавливается движение по направлению к городу  $Z$ . Поэтому никакой маршрут, соединяющий два других города, уже не может пройти через  $Z$  и надо только установить направления движения на дорогах между оставшимися  $n-1$  городами так, чтобы ни в один из них нельзя было вернуться, двигаясь по этим направлениям. По предположению индукции это можно сделать  $(n-1)!$  способами. Следовательно, общее число способов равно  $n \cdot (n-1)! = n!$ .

Другое решение основано на том, что существует единственный самый длинный (по числу дорог) маршрут



**M820\*** а) Правильный восьмиугольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы два прямоугольника.

б) Правильный  $4k$ -угольник разрезан на конечное число параллелограммов. Докажите, что среди них есть хотя бы  $k$  прямоугольников.

в) Найдите суммарную площадь прямоугольников из пункта б), если длина стороны  $4k$ -угольника равна 1.

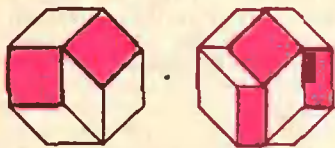


Рис. 1.

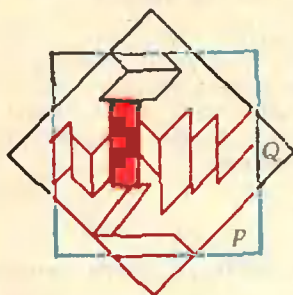


Рис. 2.

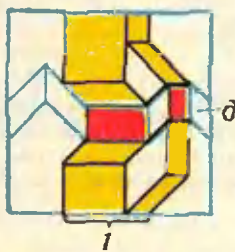


Рис. 3.

по «закодированной» этим волшебником Швамбрании. Он состоит из  $n-1$  дорог, проходит через все  $n$  городов, начинается в городе  $A$ , из которого можно только выехать, и кончается в городе  $Z$ , в который можно только въехать. Если этот маршрут указан, то занумеровав города по ходу его следования числами от 1 до  $n$ , мы можем однозначно восстановить направление на любой дороге по правилу пункта а). Докажите перечисленные утверждения самостоятельно.

В. Н. Дуброзский, Л. М. Косилов

а) Примеры простейших разрезов правильного восьмиугольника на параллелограммы показаны на рисунке 1. Для доказательства утверждения представим правильный восьмиугольник как пересечение двух квадратов  $P$  и  $Q$ . Пусть для определенности у квадрата  $P$  две стороны вертикальны, две горизонтальны (рис. 2). Будем строить из параллелограммов разбиения «дорожку», начинающуюся от левой стороны квадрата  $P$ , так, чтобы каждый следующий параллелограмм примыкал к предыдущему по вертикальной стороне или ее части. Ясно, что последний параллелограмм этой дорожки будет примыкать к правой стороне квадрата  $P$ . Такого же рода дорожка соединяет нижнюю сторону квадрата  $P$  с верхней. (Мы будем называть такие две дорожки *перпендикулярными*.) Общий параллелограмм этих двух дорожек является прямоугольником, так как его стороны параллельны сторонам квадрата  $P$ . Второй прямоугольник получим, повторив это построение для квадрата  $Q$ .

б) Правильный  $4k$ -угольник является пересечением  $k$  одинаковых квадратов, каждый из которых дает свою пару перпендикулярных дорожек, а каждая пара дорожек дает прямоугольник (см. пункт а)). Итого, мы учли  $k$  прямоугольников.

в) Ответ: сумма площадей всех прямоугольников разбиения равна  $k$ .

Сначала разрежем параллелограммы разбиения на более мелкие параллелограммы так, чтобы новое измельченное разбиение удовлетворяло следующему требованию: *любые два его параллелограмма либо не имеют общих точек, либо имеют общую вершину, либо имеют общую сторону целиком*. При этом стороны каждого параллелограмма нового разбиения будут параллельны сторонам содержащего его параллелограмма старого разбиения. Поэтому объединение всех новых прямоугольников совпадает с объединением всех старых прямоугольников, а значит, достаточно решить задачу для нового разбиения.

Рассмотрим любую дорожку  $d$  (рис. 3). Каждые два ее соседних параллелограмма имеют целую общую сторону, длину которой назовем шириной дорожки. Таким образом, длина одной из сторон каждого прямоугольника, входящего в дорожку  $d$ , равна ее ширине, а сумма длин их вторых сторон равна суммарной ширине всех дорожек, перпендикулярных  $d$ , то есть единице — длине стороны  $4k$ -угольника. Следовательно, общая площадь всех прямоугольников дорожки численно равна ее ширине.

Возьмем теперь один из  $k$  квадратов, дающих в пересечении наш  $4k$ -угольник. Сумма площадей всех прямоугольников, принадлежащих дорожкам, соединяющим две противоположные стороны квадрата, равна сумме ширин этих дорожек, то есть 1. А поскольку каждый из прямоугольников разбиения получается как пересечение двух перпендикулярных дорожек (в соответствующем квадрате), сумма площадей всех прямоугольников равна числу квадратов  $k$ .

Докажите самостоятельно, что если правильный  $4k$ -угольник разрезан на минимальное возможное число параллелограммов (в этом случае все они будут ромбами), то среди них найдутся ровно  $k$  одинаковых квадратов.

В. В. Произволов



**Ф828.** Из точек *A*, *B* и *C*, лежащих на одной прямой (точка *B* лежит между *A* и *C*), бросают три тела — *a*, *b* и *c*:

1) бросают одновременно тела *a* и *b* и не бросают тело *c*; при этом тела *a* и *b* сталкиваются в полете;

2) бросают одновременно тела *a* и *c* и не бросают тело *b*; при этом тела *a* и *c* сталкиваются раньше, чем тела *a* и *b* в первом случае. При каждом бросании каждому телу сообщают одну и ту же начальную скорость. Столкнутся ли в полете тела *b* и *c*, если не бросать тело *a*?

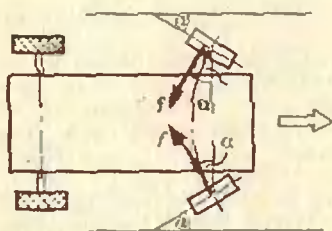
Рассмотрим движение тел в системе отсчета, движущейся вместе с телом *a* (в этой системе тело *a* покоится). Траектория тела *b* в этой системе представляет собой прямую, проходящую через точку *A* (это следует из условия столкновения тел *a* и *b*). Аналогично, траектория тела *c* в этой системе также есть прямая, проходящая через точку *A*.

Следовательно, в выбранной нами системе брошенные одновременно тела *b* и *c* движутся вдоль одной прямой, проходящей через точку *A*. Из условия задачи следует, что при этом тело *c* догонит тело *b* (поскольку столкновение брошенных одновременно тел *a* и *c* происходит раньше, чем столкновение брошенных одновременно тел *a* и *b*).

Следовательно, тела *b* и *c* столкнутся в полете, если тело *a* не бросать.

С. С. Кротов

**Ф829.** Передняя ось телеги изогнута так, что плоскости колес образуют угол  $\alpha$  с направлением движения. Найти силу сопротивления при установившемся равномерном движении телеги. Коэффициент трения скольжения колес о дорогу  $\mu$ . Вес телеги  $P$  равномерно распределен на все колеса.



При установившемся равномерном движении телеги передние колеса будут проскальзывать. При этом на каждое из этих колес будет действовать сила трения скольжения, направленная перпендикулярно плоскости колеса (при другом направлении силы трения возникал бы момент этой силы относительно оси колеса, и вращение колес ускорилось бы или замедлилось; тогда телега двигалась бы не равномерно). Абсолютное значение силы трения, действующей на каждое переднее колесо, равно

$$f = \mu \frac{mg}{4} = \mu \frac{P}{4}.$$

Сила сопротивления равна векторной сумме сил сопротивления, действующих на передние колеса. Абсолютное значение силы сопротивления равно (см. рисунок)

$$F = \mu \frac{P}{2} \sin \alpha.$$

Угловая скорость вращения колес установится такой, чтобы обеспечить нужное направление силы трения; если задние колеса вращаются со скоростью  $\omega$ , то скорость вращения передних колес будет  $\omega \cos \alpha$ .

А. И. Еринов

**Ф830.** Известно, что давление насыщенного пара над заданным раствором сахара меньше, чем над чистой водой, на величину  $\Delta p = 0,05 \times \times p_{\text{нас}} \cdot c$ , где  $p_{\text{нас}}$  — давление насыщенного пара над чистой водой,  $c$  — весовая концентрация раствора. Цилиндрический сосуд, наполненный до высоты  $h_0 = 10$  см раствором сахара с концентрацией  $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ , помещают под широкий колпак. На дне колпака раствор сахара с концентрацией  $c_2 = 10^{-3}$  (см. рисунок; высота уровня раствора много меньше  $h_0$ ). Каким будет уровень раствора в сосуде после установления равновесия? Температура под колпаком поддерживается постоянной и равной  $20^\circ\text{C}$ .

Концентрация налитого на дно раствора сахара практически не меняется.

Пусть  $h$  — высота уровня сахарного раствора в цилиндрическом сосуде после установления равновесия. Понятно, что концентрация раствора в сосуде будет равна

$$c = c_1 \frac{h_0}{h}.$$

(изменение концентрации происходит за счет испарения из раствора молекул воды — увеличение концентрации, либо за счет конденсации молекул пара в сосуд — уменьшение концентрации). Давление насыщенного пара над раствором в сосуде меньше, чем над раствором на дне, на

$$\Delta p = 0,05(c - c_2)p_{\text{нас}}.$$

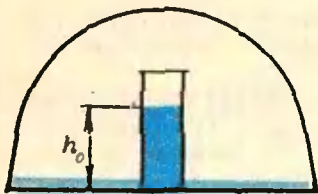
Эта разность давлений уравновешивается давлением столба пара высоты  $h$ :

$$\rho_0 g h = 0,05(c - c_2)p_{\text{нас}}.$$

Отсюда находим:

$$h = \frac{0,05(c - c_2)p_{\text{нас}}}{\rho_0 g}.$$

Пар над поверхностью раствора содержит только молекулы воды. Универсальная газовая постоянная  $R = 8,3 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .



Плотность  $\rho_p$  пара при температуре  $T = 293 \text{ К}$  найдем из уравнения газового состояния:

$$\rho_p = p_{\text{гос}} \frac{\mu}{RT}$$

Таким образом,

$$h = \frac{0,05c_p RT}{\mu g} (2 \frac{h_0}{h} - 1).$$

Подставляя приведенные в условии числовые данные, находим

$$h \approx 16,4 \text{ см.}$$

Интересно отметить, что, как следует из рассмотренной задачи, если под колпаком будут находиться два одинаковых сосуда с растворами разных концентраций, то испарение будет происходить из раствора с меньшей концентрацией. И наоборот, водяной пар будет конденсироваться в раствор с большей концентрацией. Таким образом, концентрации будут стремиться выравняться. Именно с этим физическим явлением связано намокание сахара, соли и т. п. в атмосфере влажного воздуха.

А. И. Буздин

Ф831. Незаряженная проводящая тонкостенная сферическая оболочка помещена в однородное электрическое поле. При напряженности поля  $E_0$  оболочка разрывается. При какой минимальной напряженности поля разорвется оболочка вдвое большего радиуса, имеющая ту же толщину стенок?

На проводящей оболочке, помещенной в электрическое поле, будут индуцироваться заряды. Поверхностная плотность этих зарядов пропорциональна напряженности поля  $E$ . При изменении размера оболочки в  $n$  раз и напряженности поля в  $k$  раз силы, действующие на половинки сферы (на которых индуцированы заряды противоположных знаков), изменятся в  $k^2 n^2$  раз.

Поскольку толщина стенок остается постоянной, сила, приходящаяся на единицу длины оболочки, должна быть прежней. Если в первом случае разрыв происходит при некотором значении  $f_0$  этой силы, то при увеличении размеров сферы в  $n$  раз и напряженности поля в  $k$  раз разрыв произойдет при  $f = (k^2 n^2 / n) f_0$ . Из условия  $f = f_0$  следует:

$$\frac{k^2 n^2}{n} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

При увеличении радиуса оболочки в два раза разрыв произойдет при напряженности поля

$$E = E_0 / \sqrt{2}.$$

С. К. Стржков

Ф832\*. Квадратная недеформируемая сверхпроводящая рамка со стороной  $a$  расположена горизонтально и находится в неоднородном магнитном поле, индукция которого меняется в пространстве по закону

$$\begin{aligned} B_x &\approx -kx, \\ B_y &= 0, \\ B_z &= kz + B_0. \end{aligned}$$

Масса рамки  $m$ , индуктивность  $L$ . В начальный момент центр рамки совпадает с началом координат, а стороны параллельны осям  $X$  и  $Y$ . Рамку отпускают. Как она будет двигаться и где окажется через время  $t$ ?

Магнитный поток, пронизывающий площадку, ограниченную сверхпроводящим контуром, постоянен. Действительно,  $\Delta\Phi/\Delta t = \mathcal{E}$ , но  $\mathcal{E} = -iR = 0$  (поскольку  $R = 0$ ), следовательно,  $\Phi = \text{const}$ .

Магнитный поток через площадку, ограниченную контуром, складывается из потока внешнего магнитного поля и потока магнитного поля, создаваемого током  $i$ , текущим через контур. Таким образом, магнитный поток, пронизывающий рамку, равен в любой момент времени

$$\Phi = B_0 a^2 + kza^2 + Li.$$

Так как в начальный момент ( $z = 0, i = 0$ )  $\Phi = B_0 a^2$ , в любой другой момент времени значение тока  $i$  будет определяться соотношением

$$Li = -kza^2 \Rightarrow i = -\frac{kza^2}{L}.$$

Результирующая сила, действующая со стороны магнитного поля на рамку с током  $i$ , равна сумме сил, действующих на те стороны рамки, которые параллельны оси  $Y$ ,

то есть

$$F_m = 2a |kx| i = a^2 k i,$$

и направлена вдоль оси  $Z$ .

Таким образом, уравнение движения рамки имеет вид

$$mz'' = -mg + a^2 k i = -mg - \frac{a^4 k^2}{L} z.$$

Это уравнение аналогично уравнению колебаний тела массы  $m$ , подвешенного на пружине жесткостью  $K = a^4 k^2 / L$ :

$$mz'' = -mg - Kz.$$

Из этой аналогии ясно, что рамка будет совершать гармонические колебания вдоль оси  $Z$  около положения равновесия, определяемого из условия

$$\frac{a^4 k^2}{L} z_0 = -mg \quad z_0 = -\frac{mgL}{a^4 k^2}.$$

Частота колебаний будет равна

$$\omega = \frac{a^2 k}{\sqrt{Lm}}$$

Координата  $z$  рамки через время  $t$  после начала движения равна

$$z = \frac{mgL}{a^4 k^2} \left( -1 + \cos \frac{a^2 k}{\sqrt{Lm}} t \right).$$

О. Ю. Никишина

## Старинная восточная притча

Давным-давно на востоке жил-был старик, который, умирая, оставил своим трем сыновьям 19 верблюдов. Он завещал старшему сыну — половину, среднему — четвертую часть, а младшему — пятую. Не сумев найти решения самостоятельно (ведь задача в «целых верблюдах» решения не имеет), братья обратились к мудрецу.

— О мудрец! — сказал старший брат, — отец оставил нам 19 верблюдов и велел разделить между собой: стар-

шему — половину, среднему — четверть, младшему — пятую часть. Но 19 не делится ни на 2, ни на 4, ни на 5. Можешь ли ты, о достопочтенный, помочь нашему горю, ибо мы хотим выполнить волю отца?

— Нет ничего проще, — ответил им мудрец.

Что задумал мудрец? Если вы не угадали, посмотрите окончание притчи в разделе «Ответы, указания, решения».

А. А. Бяко





## Омскому НОУ — 15 лет

Подарок юбилею — отчет о сделанном. 35 тысяч учащихся средних школ и ПТУ участвовали в различных мероприятиях омского научного общества учащихся за прошедшие полтора десятка лет. Самым первым из «ноушат» — уже 30 лет. Немало среди них кандидатов наук и отличных инженерно-изобретателей, врачей, агрономов, учителей. Многие и сейчас не расстаются с обществом, но уже в новом качестве — руководителей кружков и секций. А вот многие активисты НОУ 1983 года и родились-то в один год с обществом.

Юбилейный год начался с того, что в августе 1982 года 60 учащихся городских и сельских школ по путевкам НОУ отдыхали и занимались в математических отрядах Летнего лагеря общества, расположенного в живописных окрестностях одного из районных центров. Секцию математики курируют ученые математического факультета ОмГУ и Института математики СО АН СССР, кружками руководят лучшие учителя школ, сотрудники городского дворца пионеров и школьников, ВЦ ОмГУ, студенты. Вместе с математиками отдыхали и пополняли знания юные астрономы и краеведы, химики и зоологи. Лагерь тоже справлял юбилей, он работал пятый раз. Много сил для его организации приложили Совет молодых ученых Обкома ВЛКСМ, Городской дворец пионеров и школьников, университет, помогали его созданию Облоно и Обком профсоюза работников просвещения, высшей школы и научных учреждений.

Прошло чуть больше месяца с начала занятий в школах, и многие старшеклассники стали зрителями и участниками нового для Омска состязания — цикла «матбоек» между лучшими школами города. В финале встретились сборные школ № 88 и № 37. Около 3 часов шли различные математические конкурсы: от шуточных (средствами художественной самодеятельности проиллюстрировать теорему сложения для синусов) до настоящей экспресс-олимпиады по решению довольно трудных задач. Победила школа № 88.

Эта же школа завоевала вместе со школой № 41 переходящий кубок ОК ВЛКСМ в командной олимпиаде школ города по математике. Такой же кубок для сборных сельских районов выиграла школьница Таврического района. Но это случилось позднее, в апреле, а еще раньше прошла такая же традиционная олимпиада ПТУ, в ней впервые победителем стала сборная городского профтехучилища № 49. Надо отметить, что после

математиков подобные олимпиады по физике, химии, черчению, обществоведению, иностранным языкам, экономике труда в сотрудничестве с методическим кабинетом областного управления профтехобразования стали проводить факультеты и кафедры Университета и Политехнического института.

Главное событие — юбилейная конференция омского НОУ — началось 23 апреля 1983 года открытием в городском дворце пионеров и школьников выставки технического творчества членов общества и семинаром руководителей кружков.

На другой день в 19 секциях собрались школьники — 450 докладчиков, а слушать их пришло столько школьников, что просторные аудитории университета были переполнены.

Математики работали в 5 секциях. В отличие от прошлых лет изменился подход к определению тематики докладов. НОУ все больше работает на профессиональную ориентацию школьников, поэтому цель каждого доклада — показать применение математики в выбранной старшеклассником профессии. Большинство докладов, сделанных на секции алгебры, геометрии и анализа, демонстрировали подготовленность школьников к творческой учебе на математических специальностях.

Разнообразными были доклады на секции «Математика в технике и экономике». 16 докладов на секции «математика в гуманитарных науках» сделали школьники, избравшие профессии юристов и филологов, медиков, педагогов. На секции вычислительной математики и программирования выступили 36 школьников, освоивших программирование в различных кружках НОУ.

Обычно на математических секциях конференций НОУ выступают старшеклассники. Однако юбилейная конференция заложила новую традицию: второкурсники университета, проходившие пионерскую практику в качестве руководителей школьных математических кружков, создали секцию занимательной математики для учащихся 4—7 классов. «Малыши» рассказывали о решении интересных задач из «Кванта», показывали свойства листа Мёбиуса; лучшим признан доклад Гены Побережского, шестиклассника из с. ш. № 62, показавшего несколько приемов мгновенного умножения.

Учащиеся старших классов, выступавшие с содержательными докладами, получили рекомендации омского НОУ для поступления в избранные ими вузы, а докладчики из последней секции — математические библиотечки. Учащиеся 8 и 9 классов приглашались в кружки, летний лагерь НОУ. За победы в командных олимпиадах школьники и учащиеся ПТУ получили кубки, грамоты, торты. Так прошла 15-я юбилейная конференция научного общества учащихся. Праздник на этом кончился, а вот работа с любителями математики продолжается!

*В. Н. Сергеев*





## XVII Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук  
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,  
кандидат физико-математических наук  
А. М. СЛИНЬКО

С 13 по 20 апреля в Кишиневе проводился заключительный этап XVII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняли участие 146 школьников (42 восьмиклассника, 51 девятиклассник и 53 десятиклассника) — победители республиканских олимпиад, победители московской и ленинградской городских олимпиад и школьники, отмеченные на предыдущей Всесоюзной олимпиаде дипломами I и II степени. Столица Советской Молдавии во второй раз удостоилась этой чести. Быстро летит время. Кажется, еще совсем недавно Кишинев принимал заключительный этап VII Всесоюзной математической олимпиады, а сегодня два ее победителя — С. В. Конягин и Е. И. Хухро — приехали в Кишинев уже в качестве членов жюри.

13 апреля, в день заезда, участникам олимпиады были показаны документальные фильмы, рассказывающие об истории, культуре и экономике Молдавии. При регистрации каждому участнику вручалась памятная папка с программой заключительного этапа олимпиады, приглашением билетом на торжественное открытие, программой праздничного концерта, памятными значками и молдавскими сувенирами.

14 апреля участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и Мемориалу Славы. А затем во Дворце культуры проф-

союзов состоялось торжественное открытие. С теплыми словами приветствия к участникам олимпиады обратился министр просвещения Молдавской ССР Д. Г. Зиду: Успешного выступления, интересной, творческой работы, честной борьбы пожелали ребятам секретарь ЦК ЛКСМ Молдавии Е. М. Бейко, председатель жюри акад. АН УССР Б. В. Гнеденко и зам. председателя жюри чл.-корр. АПН СССР В. Д. Белоусов. Присутствующие единодушно приняли решение отправить Почетному Председателю жюри олимпиады акад. А. Н. Колмогорову, которому в эти дни исполнилось 80 лет, приветственную телеграмму.

Задания заключительного этапа олимпиады участники писали 15 и 16 апреля. Задание каждого из двух дней состояло из четырех задач, на решение которых отводилось по пять часов.

Ниже приводятся условия всех задач. Некоторые из этих задач включены в Задачник «Кванта» («Квант» №№ 9, 10; номер, под которым там помещена задача, указан после условия задачи), их решения читатели смогут найти в последующих номерах журнала.

### Задачи

#### Первый день

#### 8 класс

1. В сетке, изображенной на рисунке 1, каждая ячейка имеет размер  $1 \times 1$ . Можно ли эту сетку представить в виде объединения следующих множеств: а) восьми ломаных, каждая из которых имеет длину 5; б) пяти ломаных, каждая из которых имеет длину 8? (M824).

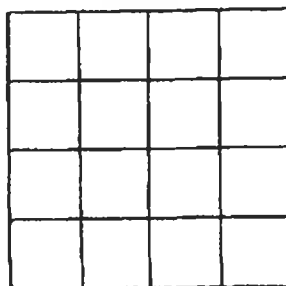


Рис. 1

2. На доске написали три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате полу-

чили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа: а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3? (М826).

3. Три круга попарно касались друг друга внешним образом в точках  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Затем радиусы этих кругов увеличили более, чем в  $\frac{2}{\sqrt{3}}$  раз, сохранив центры. Докажите, что

каждая точка треугольника  $XYZ$  оказалась открытой хотя бы одним из увеличенных кругов.

4. Даны несколько различных натуральных чисел, заключенных между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что все их попарные произведения также различны.

9 класс

1. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y \end{cases}$$

2. Натуральное число  $K$  в десятичной записи имеет  $n$  знаков. Это число округлили с точностью до десятков, заменив последнюю цифру нулем и увеличив на единицу число десятков, если эта последняя цифра была больше четырех. Полученное число аналогичным образом округлили с точностью до сотен и так далее. В результате последнего,  $(n-1)$ -го округления получилось число  $\bar{K}$ .

Докажите, что  $\bar{K} < \frac{18}{13} K$ .

3. В треугольнике  $ABC$  точка  $D$  является серединой стороны  $AB$ , точки  $E$  и  $F$  лежат на отрезках  $AC$  и  $BC$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $DEF$  не превосходит суммы площадей треугольников  $ADE$  и  $BDF$ .

4. Будут ли периодическими последовательности  $(\alpha_n)$  и  $(\beta_n)$ , состоящие, соответственно, из последних цифр целых чисел  $\{(\sqrt{10})^n\}$  и  $\{(\sqrt{2})^n\}$ ? (Здесь  $[x]$  — целая часть числа  $x$ .)

10 класс

1. Величины  $\alpha$  и  $\beta$  двух острых углов удовлетворяют равенству  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$ . Докажите, что  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ .

2. Задача № 2 для 9 класса.

3. Вершины тетраэдра  $ABCD$  ортогонально спроектированы на две плоскости. Точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  и  $A_2, B_2, C_2, D_2$  — проекции соответствующих вершин. Докажите, что одну из плоскостей можно переместить в пространстве так, чтобы прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$  стали параллельными.

4. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Решив очередное квадратное уравнение и убедившись в том, что у него имеется два корня, он составляет следующее уравнение по правилу: свободный член равен большему корню, коэффициент при переменной  $x$  равен меньшему корню, коэффициент при  $x^2$  равен единице. Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго. Каково наибольшее число уравнений, которое ему, возможно, придется решить? (М830)

Ребята довольно успешно справились с задачами, предложенными в первый день. Наибольшие трудности, как и ожидалось, вызвали задачи

8.3, 8.4, 9.4, 10.3 и 10.4. Особенно трудной оказалась задача 8.4; полностью ее сумел решить лишь один участник и еще трое участников решили ее с небольшими недочетами. Неожиданно трудной оказалась задача 9.1. Однако ни в одном из классов не было задачи, которую бы никто не сумел решить.

15 апреля, после завершения работы над конкурсными заданиями, ребята совершили увлекательную экскурсию по пушкинским местам Молдавии.

Второй день

8 класс

5. Натуральные числа  $m$ ,  $n$ ,  $k$  таковы, что число  $m^n$  делится на  $n^m$ , а число  $n^k$  делится на  $k^n$ . Докажите, что число  $m^k$  делится на  $k^m$ .

6. В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли словарь языка этого племени содержать 3 четырехбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

7. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа бумаги расставить целые числа так, чтобы в каждом прямоугольнике размера  $4 \times 6$  клеток, стороны которого идут по линиям бумаги, сумма чисел была а) 10; б) 1? (М828).

8. Все четыре треугольника, заштрихованные на рисунке 2, равновелики. Докажите, что три четырехугольника, не заштрихованные на нем, также равновелики. Чему равна площадь одного четырехугольника, если площадь одного треугольника равна  $1 \text{ см}^2$ ? (М827)

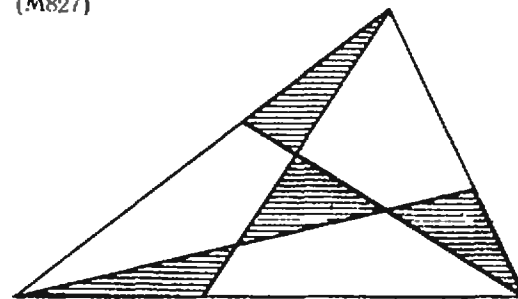


Рис. 2.

9 класс

5. Группа детского сада построилась парами друг за другом. При этом оказалось, что в каждой колонне стоит поровну мальчиков и девочек, а число пар, в которых стоят девочка и мальчик, равно числу остальных пар. Докажите, что число детей в группе делится на 8.

6. Длины двух параллельных сторон прямоугольника равны 1 см. Кроме того, известно, что двумя перпендикулярными прямыми он может быть разбит на четыре прямоугольника, три из которых имеют площадь, не меньшую  $1 \text{ см}^2$ , а четвертый — не меньшую  $2 \text{ см}^2$ . При какой минимальной длине двух других сторон прямоугольника это возможно?

7. Внутри треугольника  $ABC$  выбрана произвольная точка  $O$ . Докажите, что справедливо равенство

$$S_A \cdot \vec{OA} + S_B \cdot \vec{OB} + S_C \cdot \vec{OC} = \vec{0},$$

где  $S_A, S_B, S_C$  — площади треугольников  $BCO, CAO, ABO$  соответственно.

8. Докажите, что среди любых  $2m+1$  различных целых чисел, не превосходящих по модулю  $2m-1$ , можно найти три числа, сумма которых равна 0. (М829)

10 класс

5. Задача № 5 для 8 класса.

6. На сторонах  $AB, BC, CA$  треугольника  $ABC$  (но не в вершинах) выбраны точки  $D, E, F$  соответственно. Обозначим через  $d_0, d_1, d_2, d_3$  длины наибольших сторон треугольников  $DEF, ADF, BDE, CEF$ . Докажите,

что  $d_0 > \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$ . В каких случаях имеет место равенство?

7. Множество  $M$  состоит из  $k$  попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины, не большей 1, можно расположить на прямой так, чтобы концы его принадлежали множеству  $M$ . Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих  $M$ , не меньше  $\frac{1}{k}$ . (М825).

8. В бесконечном десятичном разложении действительного числа  $a$  встречаются все цифры. Пусть  $v_n$  — количество различных цифровых отрезков длины  $n$ , встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого  $n$  выполнено условие  $v_n < n+8$ , то число  $a$  рационально.

С заданиями второго дня ребята также справились, в целом, хорошо. В восьмом и десятом классах задачи второго дня были примерно равны по сложности задачам первого дня. У десятиклассников наибольшие трудности вызвали задачи 10.7 и 10.8. В восьмом классе наиболее сложной оказалась задача 8.7; оба ее пункта решил лишь один участник, еще трое участников решили по одному пункту. В девятом классе задачи второго дня были более сложными, чем задачи первого дня. Значительные трудности у девятиклассников вызвали задача 9.8 (что жюри предвидело заранее) и задача 9.6 (что явилось полной неожиданностью для жюри). Для некоторых задач ребята предложили свои, оригинальные решения, которые не были известны жюри. Особенно радует то, что в этом году учащиеся девятых и десятых классов успешно справились с задачами по геометрии, причем девятиклассники при решении задачи 9.3 свободно оперировали свойствами геометрических преобразований.

19 апреля в Республиканском молодежном центре им. Ю. А. Гагарина состоялось закрытие Олимпиады, участникам были вручены дипломы (см. с. 56), грамоты и призы. Успешно выступили в Кишиневе победители предыдущей олимпиады. Особенно хотелось бы отметить девятиклассников Евгения Абакумова и Константина Игнатьева, второй год подряд удостоенных дипломов I степени. Девятиклассница Снiedzэ Седола, успешно выступившая за десятый класс, была награждена призом журнала «Квант» — подшивкой журнала за 1982 г. с автографом Главного редактора журнала академика И. К. Кикоина. Оргкомитет Олимпиады-XVII передал эстафету представителю Туркменской ССР — республики, которой поручено проведение XVIII Всесоюзной математической олимпиады.

Вечером был проведен математический бой между командой жюри, возглавляемой ее бессменным капитаном С. В. Конягиным, и командой участников олимпиады. В упорной борьбе команде жюри удалось одержать победу.

Ход заключительного этапа олимпиады широко освещался в республиканской прессе и в выпусках последних известий по радио, работал пресс-центр, которым руководили члены НОУ «Винторул»<sup>\*</sup>). Каждый день выпускались математическая газета «Сигма» и различные «Молнии».

16 апреля в помещении конференц-зала Академии наук МССР состоялась встреча участников олимпиады с учеными Молдавии, посвященная Дню науки. Очень интересно прошли защита творческих работ участников олимпиады и заседание клуба «Эврика», организованные НОУ «Винторул». Как всегда, интересной получилась традиционная встреча участников олимпиады с редакцией журнала «Квант».

Незаметно пролетели восемь дней, которые провели на молдавской земле участники олимпиады, но память от этих дней, о Празднике математики ребята сохраняют надолго.

<sup>\*</sup>) См. «Квант», 1977, № 4.

# XVII Всесоюзная олимпиада по физике

Кандидат физико-математических наук  
Ю. А. САМАРСКИЙ

Заключительный этап XVII Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил с 13 по 20 апреля в столице Советской Литвы — Вильнюсе.

В этих ответственных соревнованиях приняли участие 150 школьников всех союзных республик: 37 восьмиклассников, 53 девятиклассника и 60 десятиклассников. Все они — победители республиканских олимпиад этого года, а также призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады.

Торжественное открытие XVII Всесоюзной олимпиады состоялось 14 апреля в помещении Детской музыкальной школы им. Б. Дварionaса. С теплыми приветственными словами к участникам олимпиады обратился министр просвещения Литовской ССР, герой Социалистического Труда В. П. Спурга; председатель жюри Всесоюзной олимпиады, заслуженный преподаватель Литовской ССР доцент И. Т. Мартишюс; заместитель председателя жюри профессор С. М. Козел; председатель общества физиков Литвы академик АН Литовской ССР П. Бразджюнас и другие товарищи. Они пожелали участникам интересной, увлекательной борьбы, отметив, что в подобных олимпиадах не бывает побежденных. После торжественной части был концерт художественной самодеятельности.

Утром 15 апреля состоялся теоретический тур заключительного этапа олимпиады. Восьмиклассникам по традиции были предложены 4 задачи (на работу отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассни-

кам — по 5 задач (на их решение давалось 5 часов). Приведем условия этих задач (большинство из них включено в Задачник «Кванта» в 9 и 10 номерах журнала за этот год).

## Теоретический тур

### 8 класс

1. На ленту транспортера, ползущую со скоростью  $v_0 = 1$  м/с, сбоку сталкивают коробку. Скорость коробки сразу после попадания на ленту равна по модулю  $u_0 = 2$  м/с и перпендикулярна скорости ленты. Какую минимальную скорость относительно Земли будет иметь коробка во время движения? Сила трения достаточно велика, так что коробка с ленты не соскальзывает.

2. На парту с углом наклона  $\alpha = 40^\circ$  к горизонту кладут шестигранный карандаш так, чтобы он не скатывался вниз и не скользил (рис. 1). 1) При каком коэффициенте трения это возможно? 2) Под каким углом  $\varphi$  к горизонтальному направлению нужно положить карандаш? Примечание. Значения тригонометрических функций можно взять из таблиц.

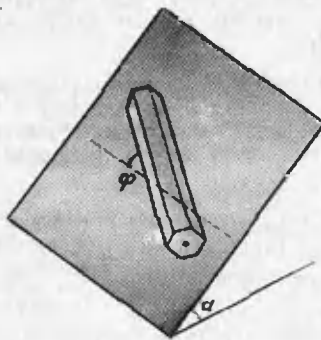


Рис. 1.

3. В закрытой коробке с двумя выводами находятся батарейка и резистор. К выводам коробки подключили последовательно резистор с сопротивлением  $R = 1$  Ом и батарейку с напряжением  $U = 1$  В. При этом в резисторе выделяется мощность  $P_1 = 1$  Вт. После того как полюса батарейки переключили, эта мощность возросла до  $P_2 = 4$  Вт. Определите напряжение батарейки и сопротивление резистора, находящихся в коробке.

4. В стакан с водой опустили нагреватель и сняли зависимость температуры воды от времени (см. таблицу). 1) На сколько градусов остынет вода за 1 мин, если нагреватель отключить от сети при температуре  $t_1 = 50^\circ\text{C}$ ? 2) Закипит ли вода, если нагреватель не выключать достаточно долго? Мощность нагревателя считать неизменной.

Время, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Температура, $^\circ\text{C}$	20	26,2	31,8	36,8	41,4	45,6	49,3	52,7	55,8	58,5	61,1

### 9 класс

1. На очень длинной невесомой нити подвешен к потолку шарик массы  $m_1 = 0,1$  кг, к нему прикреплен на нити длины  $l = 0,2$  м



шарик массы  $m_2 = 0,05$  кг. Нижнему шарiku толчком сообщают скорость  $v_0$  в горизонтальном направлении. При какой величине  $v_0$  шарик могут оказаться на одной высоте?

2. В плоской горизонтально расположенной коробке размером  $10 \times 10$  см в беспорядке лежат  $N = 1000$  маленьких стальных шариков. Масса каждого шарика  $m = 0,5$  мг. Коробку начинают двигать в горизонтальном направлении с постоянной скоростью  $v_0 = 10$  м/с. Через некоторое время движение шариков в коробке становится хаотичным, подобно движению молекул газа. 1) Найдите среднюю скорость шариков. 2) Оцените силы, действующие на стенки коробки. Соударение шариков со стенками и друг с другом считать абсолютно упругими.

3. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности планеты по вертикали с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления (в условных единицах) от времени приведен на рисунке 2. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерял и передал на борт данные о температуре:  $T = 700$  К и ускорении свободного падения:  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. Определите скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа ( $CO_2$ ).

4. Пластина А плоского конденсатора неподвижна, пластина В прикреплена к стенке пружиной и может двигаться, оставаясь параллельной пластине А (рис. 3). После замы-

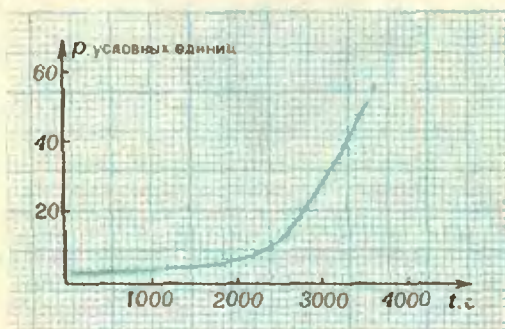


Рис. 2.

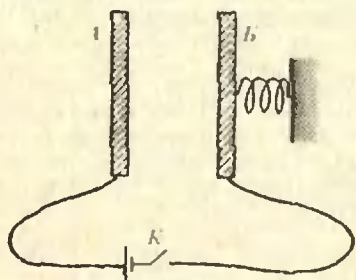


Рис. 3.

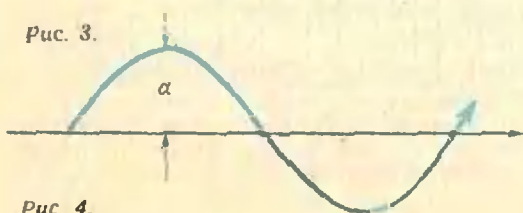


Рис. 4.

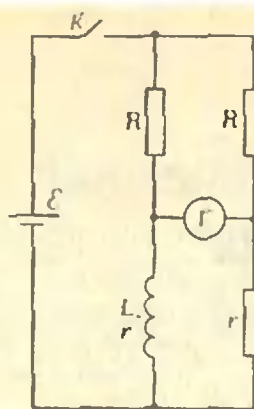


Рис. 5.

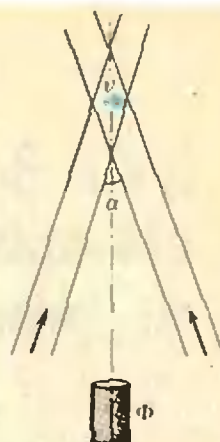


Рис. 6.

кания ключа  $K$  пластина В начала двигаться и остановилась в новом положении равновесия. При этом расстояние между пластинами уменьшилось на  $\alpha = 10\%$ . На сколько изменилось бы равновесное расстояние между пластинами если бы ключ  $K$  замкнули на короткое время? Предполагается, что за это время пластина В не успевает заметно сдвинуться.

5. Лампочка мощностью  $P = 60$  Вт, рассчитанная на напряжение  $U = 200$  В, имеет нить накала массы  $m = 0,3$  г. Ее подключают к источнику постоянного напряжения через прерыватель, который периодически замыкает цепь на время  $\tau_1 = 8 \cdot 10^{-3}$  с и размыкает на  $\tau_2 = 12 \cdot 10^{-3}$  с. Напряжение источника подобрано так, что лампа горит нормальным накалом. 1) Найдите напряжение источника. 2) Оцените изменение температуры нити в течение периода. Удельная теплоемкость материала нити  $c = 140$  Дж/(кг · К).

10 класс

1. В 1844 году выдающийся математик и астроном Бессель обнаружил, что собственное (не связанное с движением земного наблюдателя) движение Сириуса происходит примерно по синусоиде (рис. 4) с максимальным угловым отклонением от прямолинейного пути  $\alpha = 2,3''$  и периодом  $T = 50$  лет. Бессель предположил (через 18 лет это было подтверждено прямыми наблюдениями), что искривление пути Сириуса вызывается наличием спутника — более слабой звезды. Найдите отношение массы  $m$  спутника (Сириуса В) к массе Солнца  $M_C$ , если масса основной звезды (Сириуса А)  $M = 2,3 M_C$ . Известно, что радиус земной орбиты  $R_0$  виден с Сириуса под углом  $\beta = 0,376''$ . Считать, что орбиты компонент Сириуса круговые, а плоскость орбит перпендикулярна направлению от Солнечной системы к Сириусу.

2. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности планеты по вертикали с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления (в условных единицах) от времени приведен на рисунке 2. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре:  $T = 700$  К и ускорении свободного падения:  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>. 1) Определите скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа ( $CO_2$ ).



Призеры олимпиады по физике, получившие дипломы I степени. Слева направо: А. Абанов, Г. Баранаускас, В. Каральник, Г. Григорьев, А. Дешиковский, М. Дьячков, С. Орлов, А. Алексеев.

2) Определите температуру на высоте  $h = 15$  км над поверхностью планеты.

3. В схеме, изображенной на рисунке 5, замыкают ключ  $K$ . 1) Найдите установившееся значение тока через катушку с индуктивностью  $L$  и сопротивлением  $r$ . 2) Какой заряд протечет после замыкания ключа через гальванометр  $G$ ? Параметры элементов, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением гальванометра  $G$  пренебречь.

4. Человек держит в вытянутой руке объектив фотовспарата и рассматривает через него удаленные предметы. Может ли пролетающая мимо объектива муха закрыть все поле зрения? Оцените минимальный размер непрозрачного предмета, который может перекрыть все поле зрения, и укажите, где его нужно расположить. Необходимые числовые данные задайте сами.

5. Для измерения скоростей частиц используется лазерный анемометр, в котором движущиеся частицы освещаются двумя пересекающимися лазерными когерентными пучками света (рис. 6). Отраженный частицами свет улавливается фотоэлементом  $\Phi$  и преобразуется в электрический сигнал. Частицы движутся по перпендикуляру к биссектрисе угла между пучками  $\alpha = 60^\circ$ . С какой скоростью двигалась частица, если при длине волны лазерного излучения  $\lambda = 0,63$  мкм был зарегистрирован периодический сигнал с частотой  $\nu = 320$  кГц?

16 апреля участники олимпиады трудились на Всесоюзном коммунистическом субботнике в лесничестве Веркяй, а вечером состоялись встречи интернациональной дружбы.

Экспериментальный тур проводился 17 апреля. Каждому участнику предлагались две задачи. Подробный

разбор задач экспериментального тура дан в статье В. А. Орлова, помещенной в этом же номере журнала. После окончания эксперимента участники олимпиады побывали на экскурсиях в Музее революции Литовской ССР и Историко-этнографическом музее.

19 апреля состоялось торжественное закрытие XVII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. На нем были объявлены результаты олимпиады и вручены награды победителям. Имена призеров, получивших дипломы I, II и III степени, приведены на странице 57.

Самый юный среди призеров олимпиады — *Дмитрий Каледин* (ученик 7 класса из Москвы) — был награжден специальным призом, учрежденным редколлегией и редакцией журнала «Квант».

Олимпиада закончилась, но олимпийское движение продолжается. Желаем всем больших успехов.

# Экспериментальный тур олимпиады по физике

Кандидат педагогических наук  
В. А. ОРЛОВ

Выполнение экспериментальных заданий заключительного тура XVII Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходило в трех вузах Вильнюса: восьмиклассники работали в Педагогическом институте, девятиклассники — в Вильнюсском университете им. В. Капсукаса, десятиклассники — в Инженерно-строительном институте. В подготовке задач приняли участие преподаватели кафедр физики этих институтов. Особо следует отметить авторов предлагавшихся заданий: А. Кивериса, А. Медейшиса, А. Брилингаса и Я. А. Семенова.

Приведем условия всех экспериментальных заданий и варианты их решений, предложенные участниками олимпиады.

8 класс

Задание 1

1) Исследуйте зависимость скорости движения тела в трубке с водой от угла наклона трубки и постройте график этой зависимости.

2) Оцените коэффициент трения между телом и стенкой трубки с водой.

3) Считая, что сила сопротивления при движении тела в жидкости пропорциональна

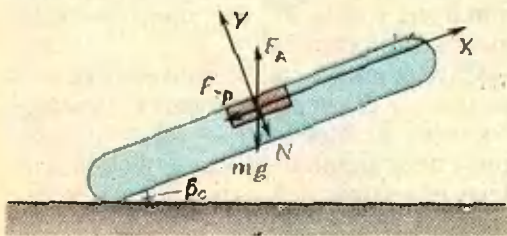


Рис. 1.

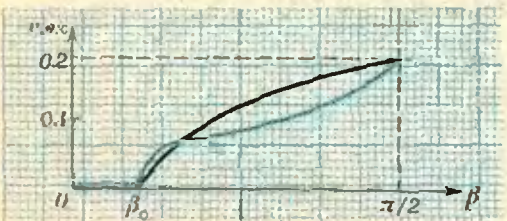


Рис. 2.

скорости:  $F_c = av$ , определите коэффициент пропорциональности  $a$ .

Оборудование: стеклянная трубка с водой и телом (объем и плотность тела заданы), линейка, штатив, секундомер, миллиметровая бумага, математические таблицы.

Опыты показывают, что тело начинает двигаться лишь после достижения трубкой некоторого минимального наклона  $\beta_0$ . Применим к этому предельному случаю второй закон Ньютона, записанный в проекциях на координатные оси (рис. 1):

$$F_A \sin \beta_0 - F_{тр} - mg \sin \beta_0 = 0,$$

$$F_A \cos \beta_0 - mg \cos \beta_0 - N = 0.$$

Учтя, что  $F_{тр} = \mu N$ , получим

$$(F_A - mg) \sin \beta_0 = \mu (F_A - mg) \cos \beta_0,$$

откуда найдем коэффициент трения между телом и стенкой трубки с водой:

$$\mu = \operatorname{tg} \beta_0.$$

При угле наклона трубки  $\beta$  больше, чем  $\beta_0$ , тело начинает двигаться равноускоренно. Но так как появляется сила сопротивления, пропорциональная скорости, тело быстро, как следует из опыта, достигает постоянной скорости. Ее легко определить по формуле  $v = l/t$ , где  $l$  — длина пути, пройденного телом с установившейся скоростью,  $t$  — время движения. Измеряя таким образом скорости тела при различных углах наклона  $\beta$ , можно построить экспериментальный график зависимости  $v = v(\beta)$ . На рисунке 2 этот график изображен синей линией.

Дополнительные баллы получили ученики, которые сравнили экспериментальную кривую с теоретической. Запишем второй закон Ньютона для случаев движения тела под произвольным углом  $\beta$  и под углом  $\beta = \pi/2$ :

$$(F_A - mg) \sin \beta - \mu (F_A - mg) \cos \beta - av = 0,$$

$$F_A - mg - av_{\pi/2} = 0.$$

Отсюда

$$v = v_{\pi/2} (\sin \beta - \mu \cos \beta) = v_{\pi/2} \frac{\sin(\beta - \beta_0)}{\cos \beta_0}.$$

Графически эта зависимость показана на рисунке 2 черной линией.

Коэффициент  $a$  легко определить для случая подъема тела в вертикальном направлении:

$$a = \frac{V(\rho_0 - \rho)g}{v_{\pi/2}}$$

где  $V$  — объем тела,  $\rho_0$  и  $\rho$  — плотности воды и тела соответственно.

Вследствие несимметричности тела, а значит, и разных условий его обтекания, при переворачивании трубки коэффициент  $a$  может получиться иным. Те, кто учли это и нашли два значения  $a$ , получили дополнительные баллы. Правда, как показал опыт, разность значений лежала в пределах погрешностей измерений.

Задание 2

1) Определите жесткость пружины и коэффициент трения стали по стеклу.

2) Используя устройство вертикального «мягкого амортизатора», определите потерю энергии шарика при первом столкновении шарика и пружины.



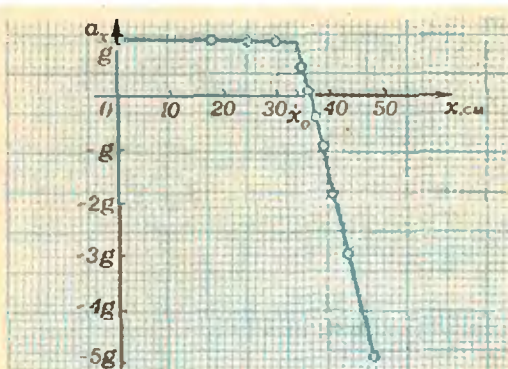


Рис. 3.

3) Для случая падения шарика с верхней точки трубки на пружину начертите график зависимости проекции ускорения шарика на вертикальную ось от расстояния от верхней точки.

**Оборудование:** стальная пружина, стеклянная трубка, стальной шарик с известной массой, линейка, миллиметровая бумага.

Определение жесткости пружины затруднений не вызвало:  $k = mg/\Delta l$ , где  $\Delta l$  — деформация пружины, когда шарик положен на нее (для устойчивости пружину помещают в вертикально поставленную стеклянную трубку). Чтобы определить коэффициент трения скольжения стального шарика по стеклу по формуле  $\mu = \operatorname{tg} \beta_0$  (где  $\beta_0$  — минимальный угол наклона, при котором начинается скольжение), необходимо было заставить шарик скользить по стеклу. С этой целью можно было, например, зажать шарик между витками пружины. Некоторые учащиеся воспользовались тем, что пружина стальная, и определяли (таким же способом) коэффициент трения скольжения пружины по стеклу.

Потерю энергии шарика большая часть учеников определила из выражения  $\Delta E = mg(h_2 - h_1)$ , где  $h_2$  и  $h_1$  — конечная и начальная высоты шарика над столом (то есть после и до первого столкновения шарика с пружиной). Некоторые определяли потери энергии по максимальному сжатию пружины.

При построении графика зависимости проекции  $a_x$  ускорения шарика на вертикальную ось от расстояния  $x$  шарика до верхней точки трубки (рис. 3) основным недочетом было чисто теоретическое решение задачи:

$$a_x = g - \frac{k}{m}(x - x_0) = g - \frac{k}{m}\Delta x = g \left(1 - \frac{\Delta x}{\Delta l}\right)$$

На самом деле все точки на графике следовало нанести после измерения соответствующих величин с учетом выбранного масштаба.

К сожалению, большая часть учеников ограничилась одним циклом падения шарика на пружину, в то время как шарик после взаимодействия с пружиной отскакивал от нее и поднимался на новую высоту, снова падал, сжимая пружину, вновь поднимался и так до полной остановки. Необходимо было все эти точки также показать на графике.

Оценивая в целом задания для 8 класса, следует отметить, что они достаточно интересны, но объем работы был велик. Полностью все задания не выполнил никто. Лучший

результат (2,1 балла из 3) показали Д. Калавискайте и Г. Мечюс (Вильнюс). Типичными недочетами были: выполнение лишь одного измерения, небрежное оформление отчета, отсутствие таблиц с экспериментальными данными и неправильное определение (а иногда и просто отсутствие) погрешностей измерений.

### 9 класс

#### Задание 1

**Определите удельную теплоемкость неизвестной жидкости.**

**Оборудование:** теплоизолированный сосуд (термостат), капилляр с пузырьком на конце, резистор, сосуды с водой и неизвестной жидкостью, измерительный цилиндр, пластинка с клеммами, миллиметровая бумага, батарея гальванических элементов, конденсатор, провода, пластилин.

При выполнении этого задания ученики столкнулись с рядом проблем:

- Как измерить температуру, не имея термометра?
- Как рассчитать энергию электрического тока, не имея секундомера?
- Как исключить неизвестную теплоемкость термостата?
- Как оценить теплоотдачу сосуда с жидкостью в окружающее пространство?

Только правильно ответив на эти вопросы, можно было выбрать оптимальную методику выполнения работы.

а) Для измерения температуры нужно изготовить газовый термометр. С этой целью капилляр с пузырьком на конце нагревается рукой, и конец капилляра опускается в воду, чтобы капля воды вошла в него. Объем воздуха в пузырьке под столбиком воды прямо пропорционален абсолютной температуре среды, в которой находится капилляр:

$$\frac{V}{V_0} = \frac{T}{T_0} \Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta V}{V_0} T_0$$

Температура окружающей среды  $T_0$  и начальный объем воздуха  $V_0$  были заданы, изменение объема воздуха при нагревании воды  $\Delta V_в$  или неизвестной жидкости  $\Delta V_x$  рассчитывается по формуле:  $\Delta V = ad^2\Delta h/4$ , где  $\Delta h$  — высота подъема столбика воды в капилляре (измеряется с помощью полоски миллиметровой бумаги, прикрепляемой к капилляру с помощью пластилина). Таким образом,

$$\Delta T = \frac{ad^2\Delta h}{4V_0} T_0$$

б) Для расчета энергии электрического тока формулу  $W = U^2 t/R$  использовать нельзя, так как не известно значение сопротивления

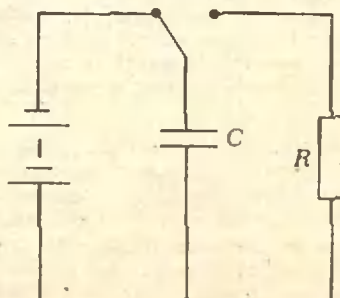


Рис. 4.



резистора  $R$  и нет секундомера. С этой целью нужно зарядить конденсатор известной емкости  $C$  до известного напряжения  $U$  и разрядить его на резистор (рис. 4), опущенный в термостат с жидкостью, причем этот процесс следовало повторить  $n$  раз. Тогда энергия электрического тока

$$W = n \frac{CU^2}{2}.$$

в) Опуская резистор в термостат с водой, а затем с жидкостью с неизвестной удельной теплоемкостью, разряжаем конденсатор определенное число раз и записываем для каждого случая закон сохранения энергии:

$$n_1 CU^2/2 = C_T \Delta T_1 + c_0 q_0 V_0 \Delta T_1,$$

$$n_2 CU^2/2 = C_T \Delta T_2 + c_x q_x V_x \Delta T_2,$$

где  $c_0$ ,  $q_0$ ,  $V_0$  — удельная теплоемкость, плотность и объем воды в термостате,  $c_x$ ,  $q_x$ ,  $V_x$  — соответствующие параметры неизвестной жидкости,  $C_T$  — теплоемкость термостата.

Для упрощения можно подобрать такие значения  $n_1$  и  $n_2$ , чтобы изменения температуры  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  были одинаковыми в обоих опытах ( $\Delta T_1 = \Delta T_2 = \Delta T$ ). Можно также наливать в термостат одинаковые объемы жидкости ( $V_0 = V_x = V_{ж}$ ). Тогда, исключая теплоемкость термостата, для неизвестной удельной теплоемкости жидкости получаем

$$c_x = c_0 \frac{q_0}{q_x} - \frac{CU^2/2(n_1 - n_2)}{V_{ж} \Delta T q_x}.$$

Однако (в связи с тем, что добиться одинакового повышения температуры не так просто) целесообразнее задать одинаковую энергию электрического тока, то есть одинаковое число переключений  $n$ . В этом случае

$$c_x = c_0 \frac{q_0}{q_x} + \frac{nCU^2/2}{q_x V_{ж} \Delta T_2} - \frac{nCU^2/2}{q_0 V_{ж} \Delta T_1}.$$

Оба способа считались верными, если давали правильную оценку удельной теплоемкости неизвестной жидкости (спирта).

г) Для оценки оптимального числа переключений ( $n=1$  — явно мало,  $n>100$  — явно много) полезно было оценить время заметного остывания жидкости в термостате, то есть теплоотдачу в окружающее пространство. Кроме того, важно было оценить время разрядки конденсатора (зная его емкость и сопротивление резистора), чтобы определить необходимую частоту переключения конденсатора.

При выполнении этого задания лучшие результаты показали Г. Баранаскас (Шяуляй), А. Король (Новокузнецк) и С. Орлов (Москва).

Характерные недочеты: пренебрежение теплоемкостью термостата, однократная разрядка конденсатора, а также недостаточное перемешивание жидкости в сосуде.

## Задание 2

**Определите ЭДС источника тока.**

**Оборудование:** источник тока с неизвестной ЭДС, источник тока с известной ЭДС, спираль из нихромовой проволоки, неградуированный чувствительный прибор для измерения тока, соединительные провода.

Трудность данной работы заключалась в невозможности производить абсолютные от-

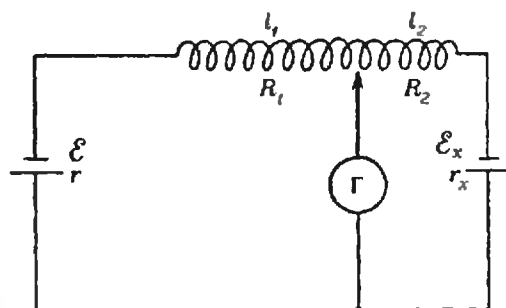


Рис. 5.

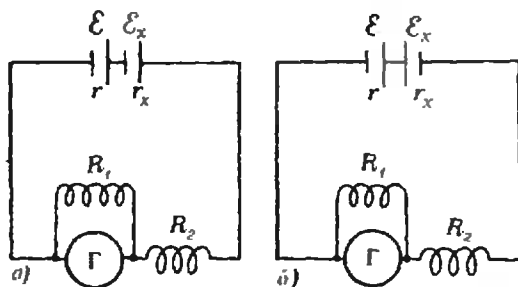


Рис. 6.

счеты силы тока, а также в том, что гальванометр без шунта нельзя было подключать к источнику тока. Для шунтирования гальванометра использовалась небольшая часть спирали (другая часть использовалась как добавочное сопротивление).

Простейший способ выполнения задания заключался в составлении двух схем: с последовательным и встречным соединением источников тока (рис. 5). Из закона Ома, записанного для этих цепей:

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_x = I_1 (r + r_x + \frac{R_1 R_r}{R_1 + R_r} + R_2),$$

$$\mathcal{E} - \mathcal{E}_x = I_2 (r + r_x + \frac{R_1 R_r}{R_1 + R_r} + R_2).$$

получаем

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_x}{\mathcal{E} - \mathcal{E}_x}.$$

Абсолютные значения силы тока нам не известны, но в формулу входит отношение сил токов  $I_1/I_2 = k$ , которое можно определить по показаниям гальванометра. Тогда

$$\mathcal{E}_x = \frac{k-1}{k+1} \mathcal{E} = \mathcal{E} \left( 1 - \frac{2}{k+1} \right).$$

Для повышения точности измерений надо было подобрать шунт таким образом, чтобы при последовательном соединении источников тока стрелка гальванометра отклонялась на всю шкалу.

Ученики, которые не смогли найти этот путь решения задачи, подключали прибор последовательно к первому источнику тока, затем ко второму, получали уравнения со многими неизвестными и были вынуждены делать различные пренебрежения, как обоснованные:  $R_1 \ll R_2$ , так и необоснованные:  $r = r_x$  или  $r \ll R$  и  $r_x \ll R$ .

Интересный способ измерения ЭДС источника (рис. 6) предложил А. Абанов (Красноярск). Перемещением скользящего

контакта он добивался того, чтобы сила тока через гальванометр была равна нулю (то есть использовал гальванометр как «нуль-прибор»). Отсюда

$$\begin{aligned} \mathcal{E} - I(R_1 + r) &= 0, \\ \mathcal{E}_x - I(R_2 + r_x) &= 0, \Rightarrow \mathcal{E}_x = \\ &= \mathcal{E} \frac{R_2 + r_x}{R_1 + r} = \mathcal{E} \frac{R_2/R_1 + r_x/R_1}{1 + r/R_1}. \end{aligned}$$

Считая  $r \ll R_1$  и  $r_x \ll R_1$ , получаем выражение для расчета  $\mathcal{E}_x$ :

$$\mathcal{E}_x = \mathcal{E} \frac{R_2}{R_1} = \mathcal{E} \frac{l_2}{l_1} = \mathcal{E} \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_1$  и  $n_2$  — число витков спирали на участках длиной  $l_1$  и  $l_2$ . Однако в данном случае этот метод давал неправильные результаты, так как внутренние сопротивления источников тока были сравнимы с внешним сопротивлением  $R_1$ .

### 10 класс

#### Задание 1

Определите ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока.

Оборудование: исследуемый источник тока, источник тока с известной ЭДС и известным внутренним сопротивлением, спираль из нихромовой проволоки, чувствительный неградуированный прибор для измерения силы тока, соединительные провода.

Первая часть этого задания ничем не отличается от второго задания для 9 класса.

Для измерения неизвестного внутреннего сопротивления источника тока  $r_x$  гальванометр с шунтом ( $R_1$ ) и добавочным сопротивлением ( $R_2$ ) следовало подключить сначала к исследуемому источнику, затем к известному:

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_x}{r_x + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2},$$

$$I_4 = \frac{\mathcal{E}}{r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + R_2}.$$

Отсюда, разумно пренебрегая сопротивлением  $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$  (так как оно много меньше  $R_2$ ), находится искомая величина  $r_x$ .

Прямой способ одновременного определения  $r_x$  и  $\mathcal{E}_x$  предложил А. Гниловской (Ленинград). Подключая к известному источнику гальванометр с шунтом сначала без добавочного сопротивления, а затем с добавочным сопротивлением  $R$ , таким, чтобы показания гальванометра во втором случае были в 2 раза меньше, чем в первом:  $I_2 = I_1/2$ , получаем, что  $R = r$  (так как  $R \ll R_1$ ). Теперь, зная значение сопротивления  $R$ , подключаем гальванометр с шунтом и с добавочным сопротивлением  $R$ , а также без него к неизвестному источнику:

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_x}{r_x + R}, \quad I_1 = \frac{\mathcal{E}_x}{r_x},$$

откуда

$$r_x = \frac{I_2}{I_1 - I_2} R, \quad \mathcal{E}_x = I_1 r_x.$$

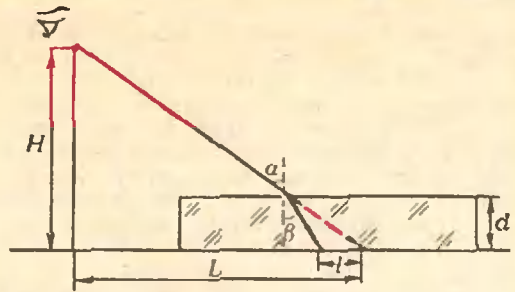


Рис. 7.

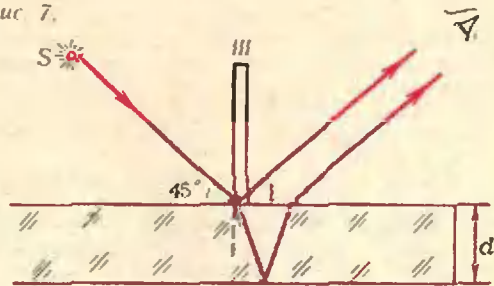


Рис. 8.

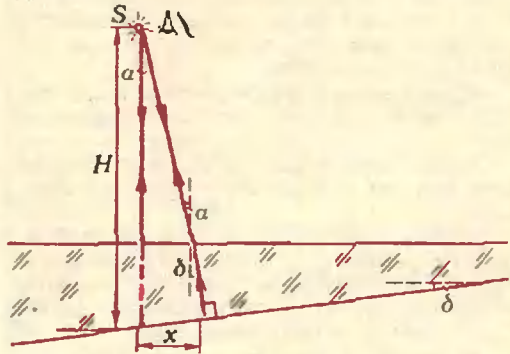


Рис. 9.

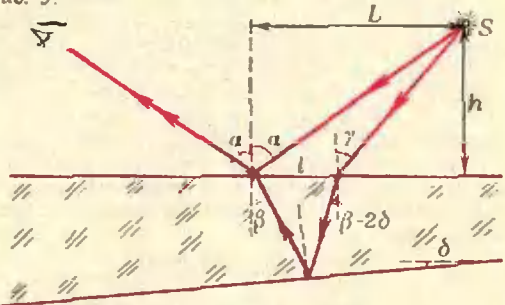


Рис. 10.

Для определения  $\mathcal{E}_x$  необходимо знать абсолютное значение силы тока  $I_1$ . С этой целью нужно проградуировать гальванометр, зная, что при полном отклонении прибора без добавочного сопротивления, подключенного к известному источнику, сила тока равна  $I = \mathcal{E}/r$ .

#### Задание 2

1) Определите различными способами показатель преломления пластинки.

2) Оцените угол между плоскостями пластинки (ее клиновидность) и укажите направление ребра клина.

Оборудование: исследуемая пластинка, ланчик с битарейкой, миллиметровая бумага.

га, измерительная линейка, кусочек пластилина.

Самым точным способом определения показателя преломления исследуемой пластинки оказался «школьный» способ. Пластинка ставилась на миллиметровую бумагу и совмещением параллельных линий сетки, отстоящих друг от друга на 5 мм, находился ход лучей. Заменяя угловые измерения линейными, можно было достигнуть погрешности измерений, не превышающей 5%.

Другой способ, приводящий к погрешностям до 10%, заключался в следующем: две параллельные линии, расстояние между которыми было  $l=2$  см, рассматривались через пластинку так, чтобы одна линия совместилась с другой (рис. 7). Измеряя расстояния  $H$ ,  $L$ ,  $l$  и  $d$ , несложно рассчитать искомый показатель преломления  $n = \frac{L}{l} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ .

Третий способ, предложенный ученикам, заключался в наблюдении светлой полосы за ширмой Ш, получаемой вследствие отражения света от двух поверхностей пластинки (рис. 8). Измеряя расстояние  $l$ , можно рассчитать показатель преломления вещества пластинки. Этот способ годится и для случая, когда нижняя поверхность пластинки зачернена и поэтому первые два способа не применимы.

Предлагались и другие способы, но по точности измерений они уступали описанным выше.

Нанбольшие трудности вызвала вторая часть задания. Опишем два способа ее выполнения.

Первый, наиболее рациональный способ, предложенный А. Алексеевым (Ленинград), А. Буриченко (Новосибирск) и М. Савровым (Азов), заключается в следующем. Лампочка располагается около глаза на высоте  $H$  от пластинки. Если смотреть на пластинку в вертикальном направлении, видно два изображения нити лампочки. Положив под пластинку полоску миллиметровой бумаги и отметив на ней две точки на расстоянии  $x$  друг от друга, можно подобрать такую высоту  $H$ , с которой два изображения лампочки будут находиться на заданном расстоянии. Зная показатель преломления вещества пластинки  $n$ , можно оценить угол  $\delta$  между плоскостями пластинки и указать направление ребра клина (рис. 9):

$$\alpha = \frac{x}{H}, \alpha = n\delta \Rightarrow \delta = \frac{x}{nH}.$$

Второй способ, предложенный В. Банковым (Алексин) и М. Дьячковым (п. Черноголовка Московской обл.), основан на наблюдении изображений светящейся нити лампочки после отражения от верхней и нижней граней. При повороте пластинки расстояние между изображениями лампочки изменяется от нуля до максимального значения. Положение пластинки при максимальном или минимальном отклонениях между изображениями сразу же позволяет сделать вывод о положении ребра клина и о том, в каком месте толщина пластинки максимальна, а в каком минимальна. Расчет же угла  $\delta$  удобнее проводить при совмещении обоих изображений (рис. 10). Измеряя расстояния  $h$ ,  $l$  и  $L$ , можно рассчитать искомый угол  $\delta$

## Призеры

### XVII Всесоюзной

### Олимпиады школьников

#### Математика

##### Дипломы I степени

по 8 классам получили  
Леонтьева О. (Ленинград, с. ш. № 298),  
Пентус М. (Таллин, с. ш. № 1),  
Скуиньш А. (Рига, с. ш. № 1);

##### по 9 классам —

Абакумов Е. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),  
Богомольная А. (Ленинград, с. ш. № 239),  
Игнатъев К. (Москва, с. ш. № 2),  
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),  
Назаров Ф. (Ленинград, с. ш. № 239),  
Этингоф П. (Киев, с. ш. № 145);

##### по 10 классам —

Бриталс Я. (Рига, с. ш. № 1),  
Жуков И. (Ленинград, с. ш. № 239),  
Парновский Л. (Львов, с. ш. № 52),  
Семенов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),  
Черанс К. (Рига, с. ш. № 1).

##### Дипломы II степени

по 8 классам получили  
Алексеев Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),  
Басов О. (п. Владимир-30 Владимирской обл.),  
Батюта С. (п. Немешаево Киевской обл.),  
Биргер А. (Иваново, с. ш. № 6),  
Иванов Л. (Саратов, с. ш. № 13),  
Леонов А. (Алма-Ата, РФМШ),  
Малеванец А. (Киев, ФМШ при КГУ),  
Раджюнас М. (Вильнюс, с. ш. № 23);

##### по 9 классам —

Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),  
Бураго А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),  
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),  
Грундмане Д. (Рига, с. ш. № 1),  
Дуйсекулов М. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),  
Кабанов А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),  
Оридорога Л. (Донецк, с. ш. № 64),  
Ртищев А. (Фрунзе, с. ш. № 61),  
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85),  
Хрычиков В. (Севастополь, с. ш. № 24);

##### по 10 классам —

Буриченко В. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

*Виннер Г.* (Свердловск, с. ш. № 9),  
*Ворожейкин В.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),  
*Кохась К.* (Ленинград, с. ш. № 239),  
*Орлов Д.* (Владимир, с. ш. № 8),  
*Родионов А.* (Москва, с. ш. № 444),  
*Садатов С.* (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),  
*Седола С.* (Рига, с. ш. № 1),  
*Харитонов Р.* (Николаев, с. ш. № 38).

#### Дипломы III степени

по 8 классам получили  
*Атаманчук Ю.* (п. Усть-Юган Тюменской обл.),  
*Бадрин Е.* (Рязань, с. ш. № 8),  
*Дворцовой Д.* (Минск, с. ш. № 19),  
*Есипова Т.* (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),  
*Маричец Ю.* (Львов, с. ш. № 11),  
*Святодух И.* (Красноармейск Донецкой обл., с. ш. № 3),  
*Троицкий В.* (Южно-Свхвлинск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

*Ведерников А.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),  
*Виксна Ю.* (Алуксне, с. ш. № 1),  
*Гараев М.* (Физули, с. ш. № 2),  
*Глуховский Л.* (Москва, с. ш. № 842),  
*Кангро Р.* (Таллин, с. ш. № 1),  
*Ковалевский А.* (Коммунарск, с. ш. № 7),  
*Маргвелашвили Г.* (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),  
*Мисник С.* (Воронеж, с. ш. № 62),  
*Набиев С.* (Алма-Ата, РФМШ),  
*Плакунова Е.* (Горький, с. ш. № 40),  
*Рейсонс Э.* (Рига, с. ш. № 1),  
*Сергиенко А.* (Североморск, с. ш. № 12),  
*Харлап С.* (Гомель, с. ш. № 12),  
*Царин Ю.* (Харьков, с. ш. № 116),  
*Чернышев С.* (Александров, с. ш. № 5);

по 10 классам —

*Айксаар Т.* (Тарту, с. ш. № 10),  
*Арабидзе В.* (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),  
*Байбородин О.* (Сыктывкар, с. ш. № 1),  
*Булава В.* (Паневежис, с. ш. им. Бальчикинса),  
*Васильченко Е.* (Алексин, с. ш. № 3),  
*Гаврилов С.* (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),  
*Зорько О.* (Витебск, с. ш. № 31),  
*Итенберг И.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),  
*Кноп К.* (Одесса, с. ш. № 100),  
*Кузнецов Д.* (Горький, с. ш. № 36),  
*Марголин Г.* (Калнинковичи, с. ш. № 1),  
*Мисник В.* (Кишинев, с. ш. № 37),  
*Сапегин И.* (Пенза, с. ш. № 29),  
*Стаховский В.* (п. Капустин Яр Астраханской обл., с. ш. № 231),  
*Судаков А.* (Ленинград, с. ш. № 8),  
*Тупайло С.* (Киев, ФМШ при КГУ).

#### Физика

##### Дипломы I степени

по 8 классам получили  
*Григорьев Г.* (Киев, ФМШ № 2 при КГУ);

по 9 классам —

*Абанов А.* (Красноярск, с. ш. № 170),  
*Баранукас Г.* (Шяуляй, с. ш. № 5),

*Дешковский А.* (Барановичи, с. ш. № 15),  
*Каральник В.* (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —

*Алексеев А.* (Ленинград, с. ш. № 239),  
*Дьячков М.* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

##### Дипломы II степени

по 8 классам получили

*Иваненко Т.* (Киев, с. ш. № 145),  
*Каледин Д.* (Москва, с. ш. № 728),  
*Меньков В.* (Мончегорск, с. ш. № 3),  
*Тепляев А.* (Ленинград, с. ш. № 524);

по 9 классам —

*Брезгунов А.* (Новосибирск, с. ш. № 25),  
*Закревский Л.* (Минск, с. ш. № 50),  
*Король А.* (Новокузнецк, с. ш. № 7),  
*Курников И.* (Гатчина, с. ш. № 1),  
*Паршин Н.* (Пенза, с. ш. № 6),  
*Потеряйко И.* (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),  
*Приходько В.* (Ростов-на-Дону, с. ш. № 14),  
*Ярунин Н.* (Павлово, с. ш. № 1);

по 10 классам —

*Амшинский С.* (Ленинград, с. ш. № 239),  
*Бирзвалкс В.* (Рига, с. ш. № 1),  
*Буриченко А.* (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),  
*Гниловской А.* (Ленинград, с. ш. № 239),  
*Кулябин К.* (Челябинск, с. ш. № 127),  
*Савров М.* (Азов, с. ш. № 6),  
*Фатьянов О.* (Курск, с. ш. № 6).

##### Дипломы III степени

по 8 классам получили

*Зеленюк А.* (Здолбунов, с. ш. № 6),  
*Линдунен И.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);  
*Лобода А.* (Прокопьевск, с. ш. № 2);

по 9 классам —

*Воротнев П.* (Ленинград, с. ш. № 239),  
*Галочкин Д.* (Днепропетровск, с. ш. № 15),  
*Кузницын К.* (Киров, с. ш. № 16),  
*Макаров Д.* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),  
*Мусаевая К.* (Ереван, с. ш. № 55),  
*Писарев А.* (Москва, ФМШ № 18 при МГУ);

по 10 классам —

*Аристов Д.* (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),  
*Брунцов Е.* (Коммунарск, с. ш. № 22),  
*Виниченко В.* (Ворошиловград, с. ш. № 24),  
*Долгополов С.* (Пермь, с. ш. № 8),  
*Коба И.* (Запорожье, с. ш. № 28),  
*Кондратьев С.* (Кострома, с. ш. № 32),  
*Ливинский А.* (Минск, с. ш. № 50),  
*Подоба В.* (Харьков, с. ш. № 9),  
*Стефанов М.* (Москва, с. ш. № 1).





**XVII Всесоюзная олимпиада по математике**  
8 класс

3. Пусть  $O$  — точка внутри треугольника  $XYZ$ . 1-е доказательство. Один из углов  $XOA, AOZ, ZOC, COY, YOB, BOX$  не меньше  $60^\circ$  (рис. 1). Пусть, например,  $XOA > 60^\circ$ . Применяя лемму «Если точка  $O$  лежит вне Окр  $(A, R)$ ,  $X \in \text{Окр}(A, R)$  и  $XOA > 60^\circ$ ,

то  $|AO| < \frac{2}{\sqrt{3}} R$ » (докажите ее!), получаем  $|AO| < \frac{2}{\sqrt{3}} |AX|$ , то есть  $O \in \text{Кр}(A, \frac{2}{\sqrt{3}} |AX|)$ .

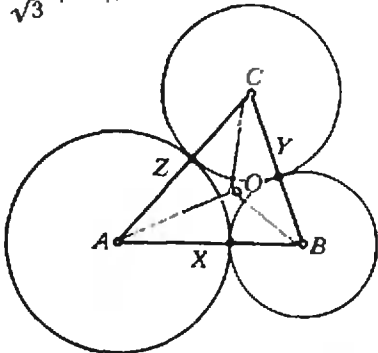


Рис. 1.

2-е доказательство. Один из углов  $AOB, BOC, COA$  не меньше  $120^\circ$ . Пусть, например,  $AOB > 120^\circ$ . Используя теорему косинусов, получаем

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= |AO|^2 + |OB|^2 - 2|AO| \cdot |OB| \times \\ &\times \cos \widehat{AOB} > |AO|^2 + |OB|^2 + |AO| \cdot |OB| - \\ &= (|AO| + |OB|)^2 - |AO| \cdot |OB| > \\ &> \frac{3}{4} (|AO| + |OB|)^2. \end{aligned}$$

Отсюда  $|AO| + |OB| < \frac{2}{\sqrt{3}} |AB| = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \times |AX| + \frac{2}{\sqrt{3}} |XB|$ . Следовательно,  $|AO| <$

$< \frac{2}{\sqrt{3}} |AX|$  или  $|OB| < \frac{2}{\sqrt{3}} |XB|$ , то есть

$O \in \text{Кр}(A, \frac{2}{\sqrt{3}} |AX|)$  или  $O \in \text{Кр}(B,$

$\frac{2}{\sqrt{3}} |BX|)$ .

4. Предположим, что различные натуральные числа  $a, b, c, d$  заключены между  $n^2$  и  $(n+1)^2$  и  $ab=cd$ . Пусть  $a$  — наименьшее из чисел  $a, b, c, d$ .

1-е доказательство. Обозначим через  $u$  наибольший общий делитель чисел  $a$  и  $c$ .

Положим  $v = \frac{a}{u}, p = \frac{c}{u}$ . Поскольку  $cd = = rid$  делится на  $a$  и  $p$  и  $a$  взаимно просты,

$ud$  делится на  $a$ . Положим  $q = \frac{ud}{a}$ . Тогда  $a = uv, b = pq, c = up, d = vq$ . Из  $a < c$  и  $a < d$  следует  $v < p$  и  $u < q$ . Тогда  $p > v+1$  и  $q > u+1$ . Из  $uv = a > n^2$  следует  $u+v > 2\sqrt{uv} > 2n$ . Если  $p > v+1$  или  $q > u+1$ , то  $b = pq > (v+1)(u+1) = uv + (u+v) + 1 > > n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$ ; значит,  $p = v+1$  и  $q = u+1$ . Если  $uv > n^2$  или  $u+v > 2n$ , то опять  $b = pq > (v+1)(u+1) = uv + (u+v) + 1 > n^2 + + 2n + 1 = (n+1)^2$ ; значит,  $uv = n^2$  и  $u+v = 2n$ , откуда  $u = v = n$ . И мы получили  $c = d$  — противоречие.

2-е доказательство.  $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} > 1$ . Пусть  $\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = \frac{r}{s}$ , где  $\frac{r}{s}$  — несократимая дробь.

Значит,  $d$  и  $a$  делятся на  $s$ ; поэтому  $d-a$  делится на  $s$ ; из  $a < d$  следует  $d-a > 1$ ; поэтому  $d-a > s, d > a+s$ . Из  $a > n^2$  следует

$d > n^2 + s$ . С другой стороны,  $\frac{r}{s} > 1$ ; поэтому

$r > s, r > s+1, \frac{r}{s} > 1 + \frac{1}{s}$ . Значит,

$$1 + \frac{1}{s} < \frac{r}{s} = \frac{b}{d} < \frac{(n+1)^2}{n^2+s} \quad (1)$$

Умножив обе части неравенства (1) на  $s(n^2+s)$ , получаем  $n^2 - 2ns + s^2 < 0, s = n$ . Тогда из (1)

$\frac{b}{d} = \frac{c}{a} = \frac{n+1}{n}$ . Если  $a > n^2$ ,

то  $a = n^2 + n$ ; тогда  $d = n^2 + 2n$ , откуда  $b = = \frac{n+1}{n} (n^2 + 2n) = (n+1)(n+2) > (n+1)^2$ ;

значит,  $a = n^2$ . Если  $d = n^2 + 2n$ , то опять

$b > (n+1)^2$ ; значит,  $d = n^2 + n$ . Поэтому  $c = = \frac{n+1}{n} \cdot n^2 = n^2 + n = d$  — противоречие.

5. Указание. Если  $a^n$  делится на  $b^n (a, b \in \mathbb{N})$ , то  $a$  делится на  $b$ . Возведите  $m^a$  и  $n^a$  в степень  $n$ .

6. Нет. Доказательство. Рассмотрим все  $2^2 = 128$  семibuквенных комбинаций из букв языка племени Абба. Из них  $3 \cdot 2^2 = 24$  начинаются с четырехбуквенных,  $10 \cdot 2^2 = = 40$  — с пятибуквенных и  $30 \cdot 2^1 = 60$  — с шестibuквенных слов словаря этого языка. По условию все эти комбинации различны и не являются словами. Значит семibuквенных слов не больше, чем  $128 - (24 + 40 + 60) = = 4$ .

9 класс

1.  $\{(0; 0), (2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}), (2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})\}$ . Указание. Вычтите из одного уравнения системы другое и исследуйте функцию  $f(x) = x^2 - 2x^2 + 2x$ .

2. Пусть  $a$  — первая цифра числа  $K$ . Тогда  $\tilde{K} < (a+1)10^{n-1}$ . Положим  $L = a44\dots45$ . Если  $K < L$ , то  $\tilde{K} = a \cdot 10^{n-1}$ ; в этом случае

$\tilde{K} < K < \frac{18}{13} K$ . Если  $K > L$ , то  $\tilde{K} = (a+1)10^{n-1}$ ;

в этом случае

$$\frac{\tilde{K}}{K} < \frac{(a+1)10^{n-1}}{L} = \frac{(a+1)10^{n-1}}{a \cdot 10^{n-1} + \frac{4}{9}(10^{n-1} - 1) + 1} < \frac{(a+1)10^{n-1}}{\left(a + \frac{4}{9}\right)10^{n-1}} = 1 + \frac{5}{9a+4} < 1 + \frac{5}{13} = \frac{18}{13}$$

3. Указание.  $S_{ABF} = 2S_{BDF}$ ,  $S_{ABE} = 2S_{ADE}$ ,  $S_{AEF} < S_{ABE}$ .

4. а) и б) Нет. Доказательство. а) Если бы последовательность  $(a_n)$  была периодической, то есть для некоторого  $p$  и для всех  $n > n_0$  было верно  $a_{n+p} = a_n$ , то была бы периодической и последователь-

ность  $(a_{2k+1})$ , так как для всех  $k > \frac{n_0}{2}$  было бы

верно  $a_{2k+1+2p} = a_{2k+1}$  (было бы верно, конечно, и  $a_{2k+1+p} = a_{2k+1}$ , но это равенство не всегда доказывает периодичность последовательности  $(a_{2k+1})$  — почему?). Но  $\{(\sqrt{10})^{2k+1}\} = \{10^k \cdot \sqrt{10}\}$ , то есть  $(a_{2k+1})$  есть последовательность цифр десятичного разложения иррационального числа  $\sqrt{10}$  — противоречие! б) Если бы последовательность  $(\beta_n)$  была периодической, то периодическими были бы и последовательности  $(\beta_{2k+1})$  и  $(\gamma_k)$ , где

$$\gamma_k = \begin{cases} 1, & \text{если } \beta_{2k+1} \text{ нечетно,} \\ 0, & \text{если } \beta_{2k+1} \text{ четно.} \end{cases}$$

Поскольку  $\beta_{2k+1}$  — это последняя цифра числа  $\{(\sqrt{2})^{2^k}\} = \{2^k \cdot \sqrt{2}\}$ ,

$$\{2^k \cdot \sqrt{2}\} - 2\{2^{k-1} \cdot \sqrt{2}\} = \gamma_k.$$

Отсюда

$$\frac{\gamma_k}{2^k} = \frac{\{2^k \cdot \sqrt{2}\}}{2^k} - \frac{\{2^{k-1} \cdot \sqrt{2}\}}{2^{k-1}}$$

Суммируя эти равенства для  $k=1, 2, \dots, n$  и учитывая, что  $\{ \sqrt{2} \} = 1$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\gamma_0 = 1$ , получаем

$$\gamma_0 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{2^n} = \frac{\{2^n \cdot \sqrt{2}\}}{2^n}$$

Из  $0 < 2^n \cdot \sqrt{2} - \{2^n \cdot \sqrt{2}\} < 1$  следует

$$0 < \sqrt{2} - \frac{\{2^n \cdot \sqrt{2}\}}{2^n} < \frac{1}{2^n}$$

Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\{2^n \cdot \sqrt{2}\}}{2^n} = \sqrt{2}.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \gamma_0 + \frac{\gamma_1}{2} + \frac{\gamma_2}{2^2} + \dots + \frac{\gamma_n}{2^n} \right) = \sqrt{2}. \quad (2)$$

Если последовательность  $(\gamma_n)$  периодична, то левая часть равенства (2) рациональна (докажите!); следовательно, рационально и  $\sqrt{2}$  — противоречие.

5. Пусть  $a$  — количество пар,  $(m, m)$  и  $(m, g)$  — количества мальчиков в левой колонне, стоящих в паре, соответственно,

с мальчиками и девочками,  $(g, m)$  и  $(g, g)$  — количества девочек в левой колонне, стоящих в паре, соответственно, с мальчиками и девочками. Из условий задачи

$$\begin{cases} (m, m) + (m, g) = (g, m) + (g, g) = \frac{a}{2}, \\ (m, m) + (g, m) = (m, g) + (g, g) = \frac{a}{2}, \\ (m, g) + (g, m) = (m, m) + (g, g) = \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Отсюда  $(m, g) = (g, m) = (m, m) = (g, g) = \frac{a}{4}$ .

Значит,  $a = 4(m, m)$ . Поскольку число детей в группе равно  $2a$ , оно делится на 8.

6.  $(3+2\sqrt{2})$  см. Решение. Допустим, что прямоугольник, изображенный на рисунке 2, удовлетворяет условию задачи:  $S_1 > 1$ ,  $S_2 > 1$ ,  $S_3 > 2$ ,  $S_4 > 1$ . Легко проверить, что  $S_1 \cdot S_4 = S_2 \cdot S_3$ . Отсюда  $S_1 + S_4 > 2\sqrt{S_1 \cdot S_4} = 2\sqrt{S_2 \cdot S_3} = 2\sqrt{2}$ . Следовательно,  $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 > 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ . Значит, длины незадаанных сторон прямоугольника не меньше, чем  $3 + 2\sqrt{2}$ . С другой стороны, прямоугольник со сторонами 1 см и  $(3+2\sqrt{2})$  см удовлетворяет условиям задачи ( $a = 2 - \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt{2} + 1$ ).

7. Введем обозначения:  $a = |\vec{OA}|$ ,  $b = |\vec{OB}|$ ,  $c = |\vec{OC}|$ ,  $\alpha = \angle BOC$ ,  $\beta = \angle COA$ ,  $\gamma = \angle AOB$ . Пусть также  $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$  — единичные векторы, сонаправленные, соответственно, с векторами  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$  (рис. 3). Тогда  $S_A = \frac{1}{2} bc \cdot \sin \alpha$ ,

$S_B = \frac{1}{2} ac \cdot \sin \beta$ ,  $S_C = \frac{1}{2} ab \cdot \sin \gamma$  и после сокращения на  $\frac{1}{2} abc$  равенство, которое надо доказать, принимает вид

$$\sin \alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin \beta \cdot \vec{e}_2 + \sin \gamma \cdot \vec{e}_3 = \vec{0}$$

Отложим от точки  $O$  вектор  $\vec{OD} = \sin \beta \cdot \vec{e}_2$  (значит,  $|\vec{OD}| = \sin \beta$ ) и проведем через точ-

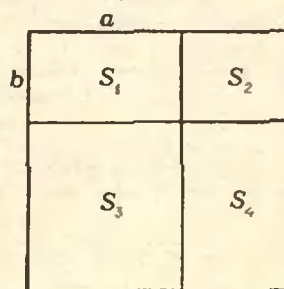


Рис. 2.

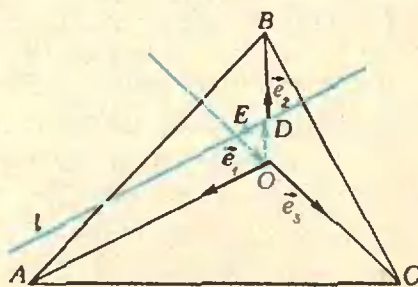


Рис. 3.

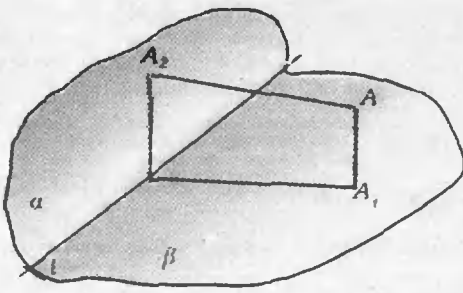


Рис. 4.

ку  $D$  прямую  $l$ , параллельную  $(AO)$ . Пусть  $(OC) \cap l = E$ . Тогда  $\widehat{OED} = \widehat{AOE} = \pi - \beta$  и  $\widehat{EOD} = \pi - \alpha$ . По теореме синусов для треугольника  $ODE$

$$|ED| = \sin(\pi - \alpha) \cdot \frac{|OD|}{\sin(\pi - \beta)} = \sin \alpha,$$

таким образом,  $\vec{DE} = \sin \alpha \cdot \vec{e}_1$ . Аналогично (из  $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$  следует  $\widehat{EDO} = \pi - \gamma$ ),  $\vec{EO} = -\sin \gamma \cdot \vec{e}_3$ . Требуемое равенство принимает теперь вид  $\vec{OD} + \vec{DE} + \vec{EO} = \vec{0}$ .

10 класс

1. Из условия  $\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta \times (\cos \alpha - \sin \beta)$ . Если  $\sin \alpha > \cos \beta$  и  $\cos \alpha > \sin \beta$ , то  $1 - \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha > \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$  — противоречие. Аналогично получаем противоречие при  $\sin \alpha < \cos \beta$  и  $\cos \alpha < \sin \beta$ . Значит,  $\sin \alpha = \cos \beta$  (и  $\cos \alpha = \sin \beta$ ), откуда

$$\sin \alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \text{ что, ввиду } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

$$0 < \frac{\pi}{2} - \beta < \frac{\pi}{2}, \text{ влечет } \alpha = \frac{\pi}{2} - \beta.$$

3. Через  $\alpha$  и  $\beta$  обозначим плоскости, на которые проектируется тетраэдр. Если они параллельны, утверждение очевидно. Если нет, то пусть  $l$  — линия пересечения этих плоскостей. Плоскость  $AA_1A_2$  перпендикулярна прямой  $l$  (рис. 4); значит,  $l \perp AA_1A_2$ . Аналогичные утверждения справедливы и для точек  $B, C, D$ . Значит, если повернуть плоскость  $\alpha$  вокруг прямой  $l$  так, чтобы она совпала с плоскостью  $\beta$ , то прямые  $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$  будут лежать в одной плоскости и будут перпендикулярны одной прямой  $l$ , лежащей в той же плоскости. Следовательно, эти прямые станут параллельными.

6. Допустим, что  $d_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$ .

Тогда  $d_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} d_1 < d_1$ ; следовательно,  $|DF|$  не является наибольшей стороной  $\triangle ADF$ ; значит,  $\angle BAC$  — острый. Пусть, для определенности,  $d_1 = |AD|$ . Проведем в  $\triangle ADF$  высоту  $DH$ ; тогда  $|DH| = d_1 \cdot \sin \widehat{BAC}$ ; так как  $|DH| < |DF| < d_0 < \frac{\sqrt{3}}{2} d_1$ ,  $\widehat{BAC} < 60^\circ$ . Аналогично получаем  $\widehat{ABC} < 60^\circ$  и  $\widehat{BCA} < 60^\circ$  — противоречие. В случае равенства  $d_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$ , рассуждая как и выше, получим  $\widehat{BAC} < 60^\circ, \widehat{ABC} < 60^\circ, \widehat{BCA} < 60^\circ$ , откуда  $\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = \widehat{BCA} = 60^\circ$ , то есть треугольник  $ABC$  — равносторонний. Теперь не-

трудно установить, что  $|DF| = |DE| = |EF| = d_0$  и  $[DF] \perp [AC], [EF] \perp [BC], [DE] \perp [AB]$ , то есть треугольник  $DEF$  — также равносторонний и его стороны перпендикулярны сторонам исходного треугольника.

8. Если для некоторого  $n$  верно  $v_n = v_{n+1}$ , то любой отрезок разложения числа  $a$  длины  $n$  имеет однозначное продолжение до отрезка длины  $n+1$ ; тогда последовательность цифр в разложении числа  $a$  является периодической (почему?), то есть  $a$  является рациональным. Рассуждая от противного, допустим, что  $a$  — не рациональное. Тогда  $v_n \neq v_{n+1}$  для любого  $n$ . Из того, что  $v_n < v_{n+1}$  для всех  $n$ , следует  $v_1 < v_2 < \dots < v_{n-1} < v_n$ ; тогда  $v_n > v_{n-1} + 1 > v_{n-2} + 2 > \dots > v_1 + (n-1) = 10 + (n-1) = n+9$  — противоречие.

Старинная восточная притча (см. с. 44)

— Возьмите моего верблюда, — предложил мудрец.

Братья дома легко разделили двадцать верблюдов пополам, на четыре и на пять. Старший брат получил 10, средний получил 5, а младший — 4 верблюда. При этом один верблюд ( $10 + 4 + 5 = 19$ ) остался. Раздосадованные братья вернулись к мудрецу и пожаловались:

— О мудрец, опять мы не выполнили волю отца! Вот этот верблюд — лишний.

— Это не лишний, — сказал мудрец, — это мой верблюд. Верните его мне и идите домой.

Неинерциальные системы отсчета

(см. «Квант» № 10)

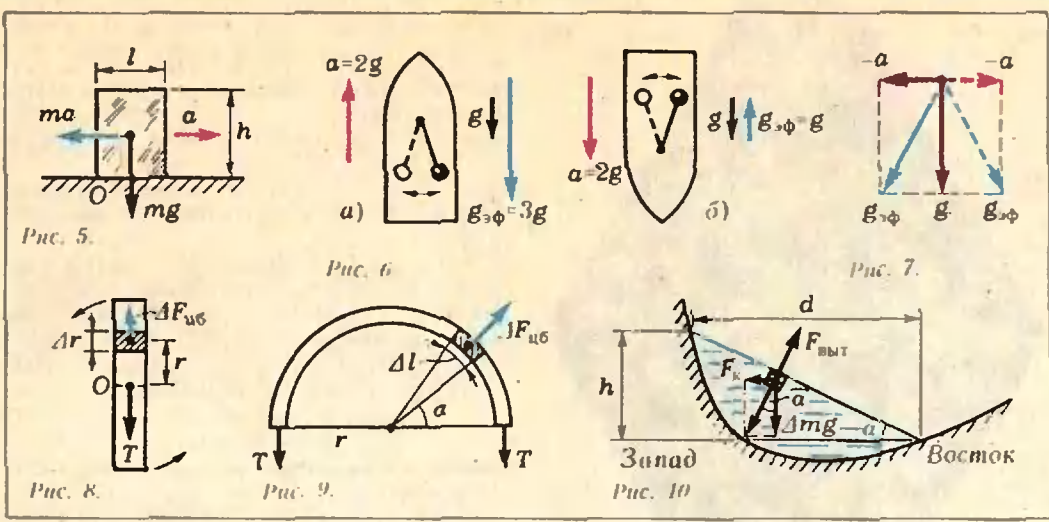
1. Используя систему отсчета, движущуюся с ускорением (рис. 5), замечаем, что момент силы инерции относительно оси  $O$  возможного поворота не должен превышать момента силы тяжести:  $mah/2 < mgl/2$ , откуда

$$h < gl/a \approx 1.6 \text{ м.}$$

2. В системе, связанной с ракетой, при ее подъеме к силе тяжести добавляется сила инерции, равная  $2mg$ . Это соответствует эффективному изменению величины ускорения свободного падения до значения  $g_{\text{эф}} = 3g$  (рис. 6, а). Колебания маятника при подъеме ракеты будут происходить с периодом  $T_1 = 2\pi\sqrt{l/(3g)}$ . При ускоренном падении ракеты сила инерции направлена вверх. Эффективное ускорение свободного падения в этом случае также направлено вверх (!) и равно  $g$  (рис. 6, б). Маятник будет колебаться «вверх ногами» с периодом  $T_2 = 2\pi\sqrt{l/g}$  — таким же, как на Земле.

3. Складывая векторно горизонтальную силу инерции —  $m\vec{a}$  и вертикальную силу тяжести  $m\vec{g}$ , получаем, что эффективное ускорение свободного падения  $\vec{g}_{\text{эф}}$  направлено под углом к вертикали и по модулю больше  $g$  как при ускорении, так и при торможении поезда (рис. 7). Поэтому период колебаний маятника в электричке на отдельных участках уменьшается, и часы в электричке будут «спешить» по сравнению с вокзальными часами.

4. Во вращающейся системе отсчета на каждый элемент стержня длиной  $\Delta r$  действует центробежная сила инерции  $\Delta F_{\text{цб}} = \Delta m \omega^2 r$ , где  $\Delta m = m \Delta r / (2l)$  — масса этого элемента,



а  $r$  — расстояние до оси (рис. 8). Центробежная сила инерции, действующая на одну из половин стержня, равна

$$F_{цб} = \int_0^l \frac{m}{2l} \omega^2 r dr = \frac{m\omega^2 l}{4}.$$

Эта сила должна быть равна силе натяжения в середине стержня, то есть силе, с которой на эту половину действует другая половина стержня. Таким образом,

$$T_0 = m\omega^2 l/4.$$

Аналогично для натяжения стержня в сечении, отстоящем от оси вращения на расстоянии  $r$ , получаем

$$T = T_0 - \frac{m\omega^2}{2l} \frac{r^2}{2} = \frac{m\omega^2}{4l} (l^2 - r^2).$$

то есть натяжение в середине максимально, а по мере удаления от оси вращения оно убывает по квадратичному закону.

5. Во вращающейся системе отсчета (рис. 9) на каждый элемент цепочки длины  $\Delta r = r\Delta\alpha$  ( $r = l/2\pi$  — радиус цепочки,  $\Delta\alpha$  угловой размер элемента длины) действует центробежная сила инерции  $\Delta F_{цб} = \Delta m\omega^2 r$ , направленная по радиусу от центра ( $\Delta m = m\Delta r/l$ ). Найдем суммарную силу инерции, действующую на половину цепочки. Для этого надо сложить проекции сил на направление, перпендикулярное диаметру, соединяющему концы половины цепочки. В результате получаем

$$F_{цб} = \int_0^{\pi} \frac{m\omega^2 r}{l} r \sin \alpha \cdot d\alpha = 2ml\omega^2.$$

Эта сила уравновешивается суммой двух сил натяжения, действующих на концы половины цепочки. Следовательно, натяжение цепочки

$$T = ml\omega^2.$$

6. Под действием центробежной силы инерции лезвие начнет двигаться вдоль канавки от оси вращения, а под действием кориолисовой силы оно будет падать в сторону, противоположную направлению вращения.

7. На частицу воды массой  $\Delta m$  действует направленная по горизонтали на запад кориолисова сила

$$F_k = 2\Delta m\omega v \sin \varphi.$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли. Для частицы, находящейся у поверхности воды (рис. 10), равнодействующая силы тяжести и кориолисовой силы должна быть направлена перпендикулярно поверхности воды. Поэтому поверхность воды наклоняется к горизонту под углом  $\alpha$  таким, что

$$\operatorname{tg} \alpha = F_k / (\Delta mg) = \frac{2\omega v}{g} \sin \varphi.$$

Соответственно, разность уровней

$$h = d \operatorname{tg} \alpha = 2\omega v d \sin \varphi / g \approx 10 \text{ см.}$$

Когда река течет вдоль параллели, сила Кориолиса направлена под углом к горизонту. Однако если параллель не совпадает с экватором, то у кориолисовой силы всегда есть горизонтальная составляющая, и эффект сохраняется. У реки, текущей вдоль экватора, сила Кориолиса направлена вертикально, и берега подмыты одинаково. А вот если река пересекает экватор, то рельеф русла меняется — после пересечения экватора крутым становится противоположный берег. Географы действительно наблюдали это явление.

**«Квант» для младших школьников**  
(см. «Квант» № 10)

1. Нет. Замечание. Перевернув одну из звездочек, получим центрально-симметричную фигуру (рис. 11).

2. Во-первых, заметим, что каждый шарик на левой чашке тяжелее, чем шарик того же цвета на правой чашке (если бы было не так, то нашлась бы пара шариков таких, что шарик на левой чашке не тяжелее шарика того же цвета на правой чашке; поменяв их местами, мы не нарушили бы положение весов). Если количество шариков на каждой чашке не меньше трех, то, поменяв местами ту пару шариков, у которой разность масс наименьшая, мы не изменим положения весов. Следовательно, шариков на чашках не более, чем по два. Может, очевидно, лежать и по одному шарiku. Если же лежит по два шарика, нужно, чтобы разность масс у каждой пары одноцветных шариков была одинакова.





Рис. 11.

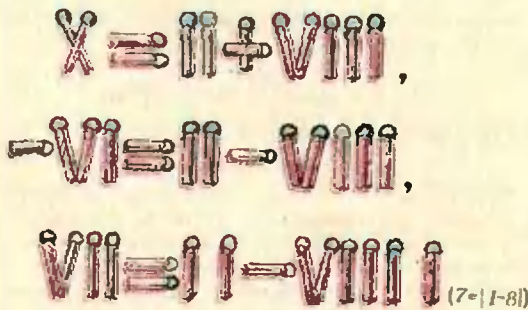


Рис. 12.

3. См. рисунок 12.

4. Заметим, что в вершинах квадрата находятся вершины только одного из прямоугольников, а в других точках квадрата могут находиться вершины только двух прямоугольников. Пусть  $n$  — количество прямоугольников, на которые разрежали квадрат,  $m$  — количество точек квадрата, являющихся вершинами ровно двух прямоугольников. Подсчитаем количество вершин у прямоугольников. С одной стороны оно равно  $4n$ , с другой —  $4 + 2m$ . Отсюда  $m = 2(n - 1)$ . Значит, число точек, являющихся вершинами  $(m + 4)$ , четно.

5. При нагревании ртуть расширяется сильнее, чем сталь, поэтому выталкивающая сила уменьшится и шарик опустится.

**Перед школьной олимпиадой**

(см. «Квант» № 10)

1. За 365 дней. Решение. Обозначим через  $A$  количество воды в озере без учета ключей, через  $B$  — количество воды, поступающее в день от ключей, через  $C$  — дневной рацион слона и через  $x$  — искомое число. Тогда  $A + B = 183C$ ,  $A + 5B = 5 \cdot 37C$ ,  $A + xB =$

$= xC$ , откуда  $B = \frac{1}{2} C$ ,  $A = 182 \frac{1}{2} C$  и  $x = 365$ .

2.  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a+b)^2 + (a+c)^2 + (a+d)^2$

3. Указание. Докажите, что  $(a-b)^2 \times \times q(1-q) = 0$ .

4.  $a = b = c = d = 0$ ,  $a = b = c = d = \sqrt{3}$ ,  $a = b = c = d = -\sqrt{3}$ .

5.  $x = y = z = 1$ . Указание. Вычтите из суммы первого и третьего уравнений удвоенное второе.

6. 3. Решение. Поскольку  $x^2 + 3x + 10 > 0$  при всех  $x$ , данное неравенство можно переписать в виде  $|x^2 + kx + 10| < x^2 + 3x + 10$ . Таким образом, для всех  $x$   $(k-3)x < 0$ . Отсюда  $k = 3$ .

7.  $\alpha$  — иррациональное. Решение. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \sin^2 \alpha x = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение, если  $\alpha$  — иррациональное.

8.  $\{\sqrt{5}\}$ . Указание. Заметив, что  $0 < x < 2$ , разберите случаи  $[x] = 0$  и  $[x] = 1$ .

9. 2. Указание. Данное произведение равно  $\frac{2(n+1)}{n+2}$ .

10. Указание. Докажите, что диагонали делятся точкой пересечения пополам.

11. Указание. Поверните меньшую окружность вокруг точки касания на угол в  $60^\circ$ . Полученная точка пересечения окружностей будет второй вершиной искомого треугольника. Поворот в противоположную сторону даст второе решение.

12. Две дуги окружностей, стягиваемые хордой  $AB$ . Указание. Угол  $y$  (рис. 13) равен  $180^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ + \frac{1}{2}x$ , то есть при постоянном  $x$  постояен.

13. Указание. Пусть  $\vec{m}_A, \vec{m}_B, \vec{m}_C, \vec{m}_D$  — векторы с началами  $A, B, C, D$  и концами в точках пересечения медиан противоположных граней. Выразите эти векторы через векторы

$\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  и докажите, что  $\frac{3}{4} \vec{m}_A =$

$$= \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{m}_B = \vec{BC} + \frac{3}{4} \vec{m}_C = \vec{AD} + \frac{3}{4} \vec{m}_D.$$

14. Указание. Покажите, что хотя бы одно из них четно.

15. Решение.  $2^9 + 2^{99} = 2^9(1 + 2^{90}) = 2^9(1 + 1024^9) = 2^9(1 + 1024^3)(1 - 1024^3 + 1024^6) = 2^9 \cdot 1025 \cdot (1 - 1024 + 1024^2)(1 - 1024^3 + 1024^6)$ .

16. Доказательство. Число  $10^n - 1$  делится на 9, а  $10^m + 1$  — не делится.

17. Решение. Как известно, сумма цифр любого целого числа имеет при делении на 9 такой же остаток, как и само число (докажите это). Следовательно, если  $x$  — искомое число, то  $2x$  и  $x$  имеют при делении на 9 одинаковые остатки, то есть  $2x - x = x$  делится на 9. В то же время непосредственно проверяется, что все двузначные числа, делящиеся на 9, удовлетворяют условию задачи.

19. 1089. Указание. Искомое число  $x$  не больше 1111 (поскольку  $9x$  — четырехзначное число), оканчивается на 9 (поскольку  $9x$  оканчивается на 1) и делится на 9 (поскольку сумма цифр у  $x$  и  $9x$  одна и та же).

20.  $x=y=1, z=2$  и  $x=y=2, z=1$ . Указание.  $z = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} < 2$ .

21. б, 7. Указание. Обозначим число цифр числа  $x^2$  через  $n$ . Тогда  $x^2 - k \cdot \frac{11 \dots 1}{n} = (x-k)^2$ , откуда  $x = \frac{55 \dots 5}{n} + \frac{k+1}{2}$ . Поскольку  $1 < k < 8$ ,

$\frac{k+1}{2} < 4$ , и, значит, число цифр в числе  $x$  равно  $n-1$ , то есть на одну меньше, чем в  $x$ . Отсюда  $x < 31$ . Непосредственной проверкой находим ответ.

22. Доказательство. Если использовалось не менее десяти красок, то можно выбрать десять разноцветных кубиков; если же использовалось не более девяти красок, то, поскольку кубиков 82, всегда найдется 10 кубиков одного цвета.

23. Указание. Рассмотрите вершины произвольного равностороннего треугольника со стороной 1 м.

24. б) Доказательство. Разность двух чисел делится на  $k$ , если оба числа при делении на  $k$  имеют одинаковый остаток. Поскольку числа  $k+1$ , такие два числа всегда найдутся.

25. Решение. Пусть  $n$  — число дипломатов.

Проверим стол на  $0^\circ$ , на  $\frac{360^\circ}{n}, \dots$  на  $\frac{360^\circ}{n}(n-1)$  — всего  $n$  положений стола.

Каждый дипломат окажется сидящим против своей таблички ровно при одном положении стола. Так как число положений равно числу дипломатов и так как при исходном положении («повороте на  $0^\circ$ ») ни один дипломат не сидит против своей таблички, найдется некоторое положение стола, при котором два дипломата окажутся сидящими против своих табличек.

26. Доказательство. Спроектируем окружности на одну из сторон квадрата. Проекцией каждой окружности является отрезок, длина которого равна ее диаметру, а сумма длин всех отрезков равна  $10/\pi > 3$ . Значит,

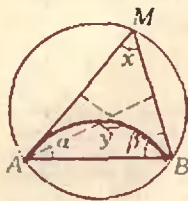


Рис. 13.

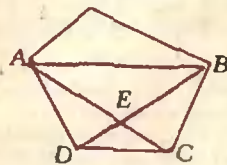


Рис. 14.

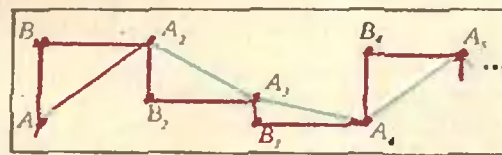


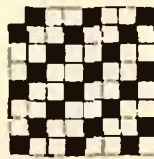
Рис. 15.



Рис. 16.



Рис. 17.



некоторая точка стороны квадрата будет покрыта по крайней мере четырьмя проекциями; перпендикуляр, восстановленный к стороне в этой точке, пересечет по крайней мере 4 окружности.

27. Доказательство. Для каждой хорды диаметр, проведенный через любую точку меньшей из стягиваемых ею дуг или через любую точку дуги, ей центрально-симметричной, пересекает эту хорду. Длина дуги, стягиваемой хордой, больше длины этой хорды. Таким образом, длина всех таких дуг больше  $2 \cdot 7\pi = 14\pi$  и, значит, некоторая точка окружности окажется покрытой по крайней мере восемью дугами.

28. Доказательство. Построим для каждой из наших 650 точек кольцо с центром в этой точке, ограничиваемое окружностями радиусов 2 и 3. Все эти кольца содержатся в круге радиуса  $16+3=19$ , и сумма их площадей равна  $650(9\pi - 4\pi) = 3250\pi$ , что более, чем в 9 раз больше площади  $361\pi$  круга радиуса 19. Следовательно, хотя бы одна точка  $A$  этого круга покрывается хотя бы десятью кольцами, то есть по крайней мере десять из наших 650 точек лежат на расстоянии между 2 и 3. Значит, такое же кольцо с центром в точке  $A$  содержит эти десять точек.

29. Указание. Рассмотрите вершину, в которой записано наибольшее число.

30. Доказательство. Пусть  $AB$  — самая длинная диагональ. Тогда из диагоналей  $AB, AC$  и  $BD$  (рис. 14) можно составить треугольник, так как  $|AB| < |AE| + |EB| < |AC| + |BD|$ .

31.  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 0$  и  $x_1 = x_2 = \dots = x_5 = 2$ . Указание. Предположите, что  $x_1$  — наибольшее из искомого числа. Тогда из двух последних уравнений  $0 > x_5 - x_1 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)x_2^2 \geq 0$ , откуда  $x_1 = x_2$ .

32.  $x = y = \sqrt{2}/2$ . Указание. Если  $x > y$ , то, поскольку  $0 < y < x < 1$ , получим  $x^y > x^x > y^y$ .

33. Нельзя. Указание.  $0+1+2+\dots+9 > 44$ .

34. Доказательство. Разделим одну сторону квадрата на 22 одинаковые части, а другую — на 2 одинаковые части. Квадрат разделится на 44 прямоугольника. Так как  $500:44 > 11$ , хотя бы в одном из них найдется 12 точек. Обозначим их через  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$  слева направо. Ломаная  $A_1A_2 \dots A_{12}$  короче ломаной  $A_1B_1A_2B_2 \dots B_{11}A_{12}$  (рис. 15), последняя же состоит из 11 вертикальных отрезков, каждый из которых не длиннее  $1/22$ , и 12 горизонтальных отрезков суммарной длины не больше  $1/2$ .

35. Банан. Указание. После любого действия садовника число бананов остается нечетным.

36. а) и б). Нельзя. Указание. В случае а) неизменной остается сумма чисел, а в случае б) — сумма квадратов чисел.

37. Не могут. Доказательство. Введем на плоскости систему координат так, чтобы вершины квадрата, в которых сидят кузнечики, имели координаты  $(0; 0), (0; 1), (1; 0)$ . При указанных прыжках каждая из координат наших кузнечиков увеличивается или уменьшается на четное число. Таким образом, четность координат оказывается инвариантом. Поэтому попасть в вершину  $(1; 1)$  (обе координаты нечетны) кузнечики не могут.

38. Нельзя. Указание. Каждая косточка домино покрывает одну черную и одну белую клетку доски. Вырезаны же две клетки одинакового цвета.

39. Нельзя. Указание. Раскрасьте клетки квадрата в шахматном порядке. Получится одинаковое число черных и белых клеток, и поэтому фигурок, изображенных на рисунке 16, а, должно быть столько же, сколько фигурок, изображенных на рисунке 16, б. Но тогда общее число клеток в квадрате должно делиться на 8.

40. Нельзя. Указание. Раскрасьте оставшуюся часть доски так, как показано на рисунке 17. В каждый трехклеточный прямоугольник должна входить ровно одна черная клетка. Черных клеток 22, но всего клеток — 63; таким образом, одна черная клетка — лишняя.

### Шахматная страничка

(см. «Квант» № 8)

**Задание 15** (Н. Плаксин, 1981 г.). Чтобы понять, что творится на доске, надо разобраться, как ходили фигуры прежде. Из всех

действующих лиц только два — конь и ферзь d7 одновременно атакуют поля, занимаемые королями. Значит, эти фигуры одинакового цвета и обязательно белого, иначе такой двойной шах невозможен, король f7 — черный, а последний ход сделала белая пешка — e7:d8K++. Кроме ферзя d7, еще семь ферзей: c8, b7, а6, a4, c2, g2 и h6, удары которых сфокусированы на поле c6, тоже белые, иначе оба короля одновременно находились бы под шахом. Так как одна белая пешка превратилась в коня, более семи белых ферзей быть не может. Поэтому еще не расквашенные девять ферзей — черные, разумеется, восемь из них — превращенные.

**Задание 16** (Г. Веник, 1922 г.). 1. Сb1!! Один из самых знаменитых ходов на шахматной доске. Слон, стоящий под ударом, становится под другой удар! Другие ходы слоном не годятся. 1...Kp:b1 (1...Kp:c3 2. Kpb5 Kpd4 3. Kpc6 Kpe5 4. Kpd7 Kpf4 5. g6 и т. д.) 2. Kpb3 и у белых выигранный пешечный эндшпиль: 2...Kp:l 3. Kpc3 Kpd1 4. Kpd3 Kpe1 5. Kpe3 Kpf1 6. Kpf3 Kpg1 7. Kpg3 Kph1 8. g6 Kpg1 9. Kpf4.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, **А. А. Михайлов**, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, И. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Капторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соколов, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 29 сентября 1983 года на 96 году жизни скончался член редакционной коллегии, выдающийся советский астроном, бывший директор Главной астрономической обсерватории АН СССР Герой Социалистического Труда академик Александр Александрович Михайлов.

#### Номер оформили

В. С. Коваль, Н. С. Кульмина, С. Ф. Лукьян,  
А. К. Малкин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова,  
Е. К. Тенчурин

Фото Л. И. Вацусюкаса, В. И. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор А. Л. Ипатова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,  
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 16.09.83. Подписано к печати 17.10.83

Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,29. Т-19263

Цена 40 коп. Заказ 2502. Тираж 166149

Ордена Трудового Красного Знамени

Чеховский полиграфический комбинат

ВО «Союзполиграфпром»

Государственного комитета СССР

по делам издательства, полиграфии

и книжной торговли

г. Чехов Московской области



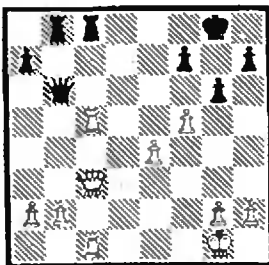
## Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

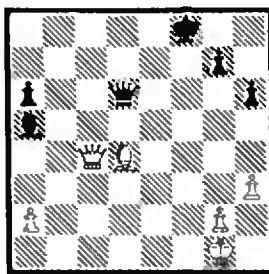
## СВЯЗКА

Известно немало комбинационных приемов и мотивов, которые применяют шахматисты во время игры. Некоторые из них носят геометрический характер, о чем свидетельствуют даже их названия: связка, отвлечение, завлечение, перекрытие, освобождение пространства, блокировка, сквозное действие фигур (реиттен) и т. д. На наших шахматных страничках мы постепенно знакомимся с каждым из перечисленных приемов. Сегодня мы рассказываем о связке.



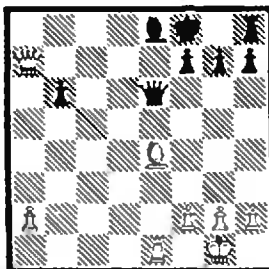
Доннер — Хьюбнер  
(Бюзум, 1968 г.)

Белая ладья связана — она находится на одной линии (в данном случае диагонали) с королем и не может сдвинуться с места. Но сама по себе связка может оказаться не опасной, ведь от нее легко избавиться. Комбинационный мотив возникает в том случае, если на связанную фигуру удастся напасть еще по одной линии, и этого действия по двум направлениям связанная сторона уже не выдерживает. 1...Л:с5 2.Ф:с5. Как будто опасность миновала, но... 2...Лс8! Итак, на роковом поле погибает не ладья, а ферзь (3.Ф:б6 Л:с1+ 4.Кр12 ab). Белые сдались.



Брунтрап — Будрич  
(Берлин, 1954 г.)

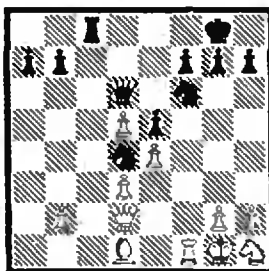
1.Сс5! Сб6! Ферзь связан, но и связывающий его слон тоже связан. После размена на b6 дело кончится ничьей, однако белые все же используют связку. 2.Фf4+! Черные сдались.



Бисгайер — Эванс  
(США, 1959 г.)

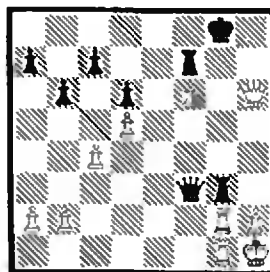
1.Фa3+ Фe7. (1...Крг8 2.С:h7+ с выигрышем ферзя). Итак, черный ферзь попал под связку, осталось воспользоваться этим обстоятельством. 2.Сb6!!, и черные немедленно сдались — 2...Ф:a3 3.Л:e8 X.

Ведущему страничку тоже однажды удалось закончить борьбу, используя связку.



Байрамов — Гик  
(Москва, 1966 г.)

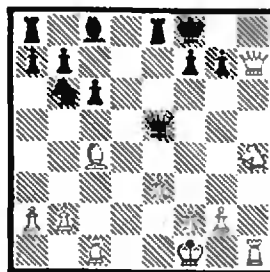
Белый конь отступил с f2 на h1, намереваясь переместиться на более удобную стюжку g3. Однако он так и не успевает добраться до желанного поля, а застревает в углу. 1...Фb6 2.Фf2 Лс2! Белые сдались. После 3.С:c2 они получают спертый мат — 3...Ke2 X, а после 3.Фe3 Ke2+ 4.Кр12 Kg4+ ферзь просто терется.



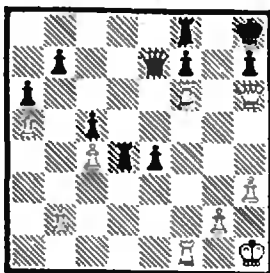
Бонгассер — Вайнер  
(Турнир по переписке, 1976 г.)

Похоже, белые не могут реализовать материальный перевес, ведь их ладья намертво связана. После 1.hg Лh7 ничья неизбежна, красиво заканчивается встреча и после 1.Фh4 Л:g2 2.Л:g2 Лg7!! 3.fg Фf1+ с вечным шахом. Игравший черными несколько дней был совершенно спокоен за свою позицию и, наверное, ожидал мирного предложения со стороны соперника. Но, раскрыв конверт, он был потрясен... Белые прислали удивительный ход — 1.Фh3!!, то есть сами использовали связку. После 1...Лg7 2.Фc8+! Крh7 3.fg Л:g7 4.Фh3+! пришлось сдать (4...Ф:h3 5.Л:g7+ Крh8 6.Лg8+ Крh7 7.Л1g7+ Крh6 8.Лh8+).

## Конкурсные задания



21. Ход белых. Выигрыш.



22. Ход белых. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 января 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22»).



Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь воспроизведены четыре рисунка, выполненные ЭВМ по программам, написанным победителями конкурса машинной графики журнала «Квант» (см. № 9 за 1981 год). Рисунок в правом нижнем углу получен Рихардом Гавликом (ЧССР) по стандартным программам. В кружке с большим увеличением показано, как графопостроитель «рисует» линии: он просто густо ставит точки по вычисленной линии. Остальные рисунки выполнены по программам на языке Паскаль с использованием графической системы Шага-5, созданной новосибирскими школьниками. «Кентавра» придумала Света Безбородова из Рубцовска (Алтайский край), «Линии Серпинского» —

Сергея Баталов из Арзамаса, «Львенок» нарисован ЭВМ по программе Димы Корнилина из Горького. Кроме школьников, названных выше, призерами конкурса стали старшеклассники Р. Дементьев (Горький), О. Машков и М. Горбатенко (ст. Инская Новосибирской обл.), А. Крипивин (Киев), Е. Двуреченский (Липецк), Е. Кузнецов (п. Нижегородский Горьковской обл.), А. Меркулова, С. Терехов и Т. Фарина (Новосибирск), Л. Хуснутдинова (Свердловск) и младшие школьники М. Хлебалов (Москва), А. Евстигнеев и Д. Пархомчук (Новосибирск).

